سلسلة ملخصات
شوم

الدوائر الكهربية

الجزء الثانى

الطبعة الأولى العربية
2001

تأليف: چوزيف أدمنستر محمود ناهقى

- يشمل الأساسيات الموجودة فى المناهج والمراجع.
- يعلم الطرق الفعالة لحل المسائل.
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلا كاملا.



الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

سلسلة ملخصات شوم

فى

الدوائر الكهربية

الجزء الثانى

تأليف

جوزيف أدمنستر

محمود ناهقى

ترجمة

د/ محمد جمال الدين محمد عبد الخالق

أستاذ متفرغ بكلية الهندسة جامعة حلوان

مراجعة

د/ السيد حسن شهاب

أستاذ بكلية الهندسة جامعة حلوان

حقوق النشر

Electronic Devices and Circuits

by

Joseph Edminster Mahmood Nahvi

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى ـ النزهة الجديدة ـ مصر الجديدة ـ القاهرة ـ ج . م . ع .

ص . ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة ـ تليفون: 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

رقم الايداع : 2001/3211

I.S.B.N: 977-282-098-6

مقدمة الكتاب

وضع هذا الكتاب كنسخة منقحة ومزيدة من الكتاب الذى تم نشره سابقاً بنفس العنوان. وقد روعى فيه إعادة التشكيل ليكون أكثر سهولة وإيضاحاً. وأضيفت إليه عدة فصول جديدة وهى الفصل الرابع بعنوان طرق التحليل، وبه الطرق المختلفة لتحليل الشبكات الكهربية باستخدام طرق التحليل والمحددات والمصفوفات، والفصل الحادى عشر بعنوان الدوائر المتعددة الأوجه وبه تم التعرف على أنواع الدوائر المختلفة مع شرح وافٍ للنظم ثلاثية الأوجه المتزنة وغير المتزنة، والفصل الثانى عشر وهو الاستجابة الترددية والمرشحات والرنين وبه تم شرح الاستجابة الترددية ودراسة الشبكات المختلفة ذات الإمرار العالى والمنخفض ودوال الشبكات والمرشحاتِ المثالية والعملية وغير ذلك من دوائر الرنين.

هذا وقد تم تغيير جزئى فى بعض الفصول الأخرى من ناحية المادة العلمية لتكون أكثر إيضاحاً، فقد أضيف إلى الفصل الثالث عشر جزء جديد للتعرف على الأطراف والمداخل للشبكات ذات المدخلين وأيضاً معاملات الثابت Z والثابت Y ومكافىء T للشبكة المعكوسة. هذا وقد تم ترتيب أرقام المعادلات والأشكال فى الفصل الأول والثانى والثالث والرابع وأضيفت أيضاً مجموعة من المسائل المحلولة والجديدة على مدار الكتاب كله حتى يتم الفهم الكامل لفصوله المختلفة.

هذا وقد صدر الكتاب فى جزئين:

* **الجزء الأول** يحتوى على الفصول من الفصل الأول إلى الفصل التاسع.

* **والجزء الثانى** من الفصل العاشر إلى الفصل السابع عشر، كما يحتوى كل جزء على ملحق للكتاب به ثلاثة أقسام.

د. جمال عبد الخالق

المحتويات

الفصل | صفحة

الفصل	صفحة

الفصل	صفحة

الفصل	صفحة

الفصل العاشر

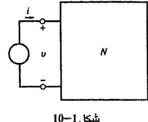
القدرة للتيار المتردد

10.1 القدرة فى مجال الزمن

تعرف القدرة اللحظية الداخلة فى دائرة N ذات طرفين شكل 10.1 بالتالى :

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad (1)$$

حيث $v(t)$ ، $i(t)$ هما جهد وتيار المنبع على التوالى . وإذا كانت P موجبة فإن الطاقة تكون معطاه للدائرة وإذا كانت سالبة فإن الطاقة تكون مسترجعة من الدائرة للمنبع .



شكل 1−10

سيتناول هذا الفصل التيارات والجهود الدورية ، وذلك بالتركيز على دوائر RLC الخطية المستقرة . وحيث أن سعة التخزين للملف أو المكثف محدودة فإن هذه العناصر لا تستطيع تخزين الطاقة دون أن تعاد مرة أخرى . ولذلك فإنه فى الحالة المستقرة وأثناء كل دورة فإن كل الطاقة التى يستقبلها الملف أو المكثف تعاد مرة أخرى . ولكن فى الحالة المستقرة فإن الطاقة التى تستقبلها المقاومة تستهلك على شكل طاقة حرارية أو ميكانيكية أو كيميائية أو كهرومغناطيسية أو بأكثر من إحدى هذه الطاقات . وعلى ذلك فإن إجمالى سريان الطاقة فى الدائرة الغير الفعالة خلال الدورة الواحدة تكون موجبة أو صفراً .

مثـــــال 10.1 : شــكـل (a)10-2 يبين شـكل التيـارات فى مقـاومـة $1\ k\Omega$. أوجـد وارسـم القـدرة اللحظية p(t) .

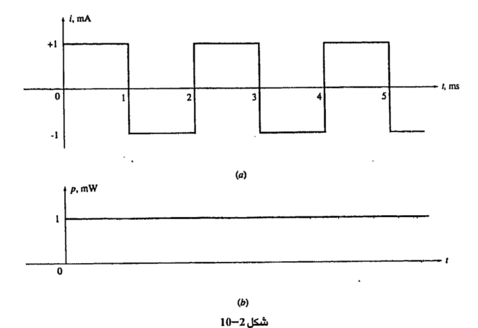
من $\upsilon = Ri$ نحصـل عــلى $p(t) = \upsilon i = Ri^2 = 1000 \times 10^{-6} = 10^{-3}\ W = 1\ mW$ انظــر شـكل (b)10-2 .

مثـــــال 10.2 : يمر التيار فى مثال 10.1 خلال المكثف $0.5\ \mu F$. أوجد القدرة p(t) الداخلة للمكثف والطاقة w(t) الداخلة والطاقة w(t) المختزنة فيه . أفرض أن $\upsilon_C(0) = 0$ وارسم كـلا من p(t) ، w(t) .

شكل (a)10-2 يبين أن التيار فى المكثف عبارة عن دالة دورية بزمن دورى T = 2ms وأثناء دورة واحدة كان التيار :

$$i = \begin{cases} 1\ mA & (0 < t < 1\ ms) \\ -1\ mA & (1 < t < 2\ ms) \end{cases}$$

ويكون أيضـاً الجـهـد على المكثف دالة دورية ولـهـا نفس الزمن الدورى T [شـكـل (a)10-3] . ويكون الجهد فى دورة تعاقبية كالتالى :



شكل 2–10

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=\begin{cases}2000t\ (\mathrm{V}) & (0<t<1\ \mathrm{ms})\\ 4-2000t\ (\mathrm{V}) & (1<t<2\ \mathrm{ms})\end{cases}$$

وأخيراً فإن القدرة الداخلة للمكثف والطاقة المختزنة (كلاهما دوريان بزمن دورى T) هى :

$$p(t)=vi=\begin{cases}2000t\ (\mathrm{mW}) & (0<t<1\ \mathrm{ms})\\ 2000t-4\ (\mathrm{mW}) & (1<t<2\ \mathrm{ms})\end{cases}\qquad \text{[Fig. 10-3(b)]}$$

$$w(t)=\frac{1}{2}Cv^2=\begin{cases}t^2\ (\mathrm{J}) & (0<t<1\ \mathrm{ms})\\ t^2+4\times10^{-6}-4\times10^{-3}t\ (\mathrm{J}) & (1<t<2\ \mathrm{ms})\end{cases}\qquad \text{[Fig. 10-3(c)]}$$

ومن جهة أخرى يمكن الحصول على w(t) بتكامل p(t) . وتكون القدرة الداخلة للمكثف خلال دورة واحدة ذات قيم موجبة وسالبة متساوية [انظر شكل 10-3(b)] وتكون الطاقة المختزنة فى المكثف دائماً موجبة كما هو مبين فى شكل 10-3(b) والقدرة العظمى المختزنة هى $W_{max} = 10^{-6}J = 1\ \mu J$ عند $t = 1, 3, 4$ s...ms .

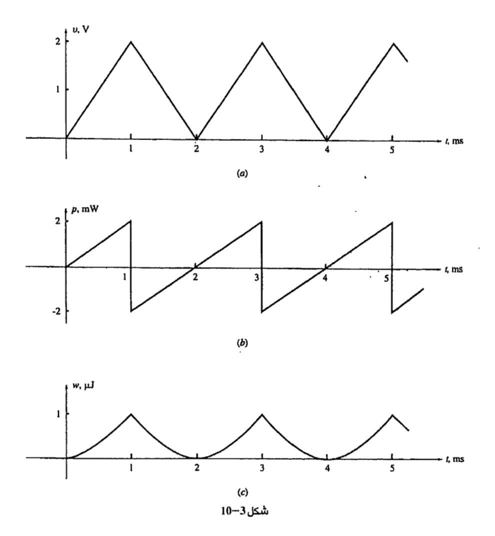
10-2 القدرة فى الدوال الجيبية المستقرة

إذا تـم توصيل جـهد جيبى $v = v_m \cos \omega t$ على طـرفى معاوقة $Z = |Z| \underline{/\theta}$ فإنـه سينشأ تيار $i = I_m \cos (\omega t - \theta)$ وتكون القدرة المعطاه للمعاوقة عند الزمن t هى :

$$\begin{aligned}p(t)=vi&=V_mI_m\cos\omega t\cos(\omega t-\theta)=\tfrac{1}{2}V_mI_m[\cos\theta+\cos(2\omega t-\theta)]\\&=V_{eff}I_{eff}[\cos\theta+\cos(2\omega t-\theta)]\\&=V_{eff}I_{eff}\cos\theta+V_{eff}I_{eff}\cos(2\omega t-\theta)\end{aligned}$$

حيث $V_{eff} = V_m/\sqrt{2}$ ، $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$ ، $I_{eff} = V_{eff}/|Z|$. وتكون القدرة اللحظية فى المعادلة (٢) تتكون من مركبة جيبية $V_{eff}I_{eff} \cos (2\omega t - \theta)$ بالإضافة لقيمة ثابتة $V_{eff}I_{eff} \cos \theta$ والتى تصبح القدرة المتوسطة P_{avg}. وهذا مبين فى شكل 4-10 . وأثناء جزء من الدورة فإن القدرة اللحظية تكون موجبة والتى تبين أن القدرة يغذى الحمل . وأثناء باقى الذبذبة فإن القدرة اللحظية يمكن أن تكون

سالبة وهذا يعنى أنها تمر إلى خارج الحمل وبذلك تكون محصلة القدرة فى دورة واحدة ليست سالبة وتسمى القدرة المتوسطة .



شكل 3–10

مثـــــال 10.3 : وصـل الجهد $\upsilon = 140 \cos \omega t$ على طرفى المعاوقة $Z = 5 \angle -60^\circ$. أوجـد $P(t)$.

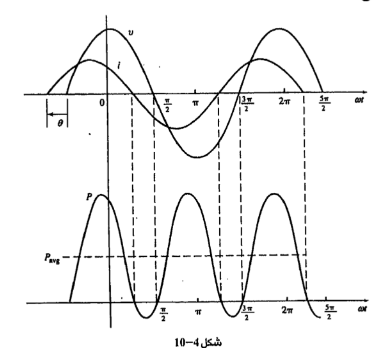
ينشأ عن الجهد υ التيار $i = 28 \cos (\omega t + 60^\circ)$ ومن ثم :

$$p(t) = \upsilon i = 140(28) \cos \omega t \cos (\omega t + 60^\circ) = 980 + 1960 \cos (2\omega t + 60^\circ)$$

للقدرة اللحظية مركبة ثابتة قيمتها 980 W ومركبة جيبية ذات تردد ضعف تردد المنبع وشكل تغير p بالنسبة للزمن t يكون مشابهاً لشكل 10.4 مع اعتبار $\theta = -\pi/3$.

10.3 القدرة المتوسطة أو الحقيقية

القدرة المؤثرة أو المتوسطة $P_{avg} = \langle p(t) \rangle$. الداخلة الحمل أثناء دورة واحدة تسمى القدرة الحقيقية . وحيث أن القيمة المتوسطة للمقدار $\cos(\omega t - \theta)$ خلال دورة واحدة يكون صفراً فإننا نحصل من المعادلة (2) على :



شكل 4–10

$$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \cos\theta \qquad (3)$$

إذا كان $Z = R + jX = |Z| \angle\theta$ فإن $\cos\theta = R / |Z|$ وبذلك يمكن التعبير عن القدرة المتوسطة P_{avg} بالقيمة :

$$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \frac{R}{|Z|} \qquad (4)$$

أو
$$P_{avg} = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} R \quad (5)$$

أو
$$P_{avg} = R I_{eff}^2 \quad (6)$$

وبذلك تكون القدرة المتوسطة ليست سالبة وهى تعتمد على V ، I وعلى زاوية الوجه بينهما وحينما تعطى قيم V_{eff} ، I_{eff} فإن القدرة P تكون قيم عظمى عند $\theta = 0$ وهذا يحدث فى الحمل المادى الخالص وبالنسبة لحمل الحثى الخالص فإن $|\theta| = 90°$ وتكون $P_{avg} = 0$. وتسمى النسبة بين P_{avg} إلى $V_{eff}I_{eff}$ معامل القدرة pf . ومن معادلة (3) فإن هذه النسبة تكون مساوية لـ $\cos\theta$ وبذلك .

$$\text{pf} = \frac{P_{avg}}{V_{eff} I_{eff}} \qquad 0 \le \text{pf} \le 1 \quad (7)$$

والترميز avg فى القدرة المتوسطة P_{avg} غالباً ما يحذف وسنذكر فى باقى هذا الفصل الحرف P للدلالة على القدرة المتوسطة .

مثـــال 10.4 : أوجد P المعطاه من جهد جيبى له القيمة $V_{eff} = 110$ v إلى معاوقة $Z = 10 + J8$ أوجد معامل القدرة .

$$Z = 10 + j8 = 12.81\angle 38.7°$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{110}{12.81\angle 38.7°} = 8.59\angle -38.7° \quad \text{A}$$

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos\theta = 110(8.59 \cos 38.7°) = 737.43 \quad \text{W}$$

$$\text{pf} = \cos 38.7° = 0.78$$

حل آخر :

We have $|Z|^2 = 100 + 64 = 164$. Then,

$$P = V_{eff}^2 R / |Z|^2 = 110^2(10)/164 = 737.8 \text{ W}$$

ومن الحل الآخر نحصل على إجابة أدق .

10.4 القدرة الغير حقيقية

إذا احتوت شبكة غير فعالة على ملفات أو مكثفات أو كلاهما فإن الطاقة الداخلة إليها في دورة واحدة تختزن ثم تعود مرة إخرى إلى المنبع . وأثناء رجوع الطاقة فإن القدرة تكون سالبة . وتسمى القدرة في هذه الحالة من التغيير قدرة غير فعالة أو قدرة متعامدة . وبالرغم من أن تأثير القدرة الكلية الغير فعالة يكون صفراً . إلا أنها تؤثر في تشغيل نظم القدرة وتعرف القدرة الغير فعالة بالرمز Q كالتالى :

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \theta \qquad (8)$$

إذا كان $Z = R + jX = |Z| L\theta$ فإن $\sin \theta = X / |Z|$ وبالتالى تكون قيمة Q هى :

$$Q = V_{eff} I_{eff} \frac{X}{|Z|} \qquad (9)$$

$$Q = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} X \qquad (10)$$

$$Q = X I_{eff}^2 \qquad (11)$$

ووحدة القدرة الغير فعالة هى بالفولت أمبير غير فعال (ڤار) (var) .

وتعتمد القدرة الغير فعالة Q على V ، I وزاوية الوجه بينهما . وهى حاصل ضرب الجهد مع مركبة التيار التى تصنع زاوية 90° مع الجهد . وتكون Q صفراً حينما تكون $\theta = 0°$ وهذا يحدث فى الحمل المادى الخالص حينما يكون V ، I فى نفس زاوية الوجه . وحينما يكون الحمل غير فعال تماماً وبالتالى فإن $|\theta| = 90°$ وتصل Q إلي قيمتها العظمى لقيم V ، I المعطاه ولاحظ أنه بينما P تكون دائماً غير سالبة فإنه يمكن اعتبار Q موجبة (للحمل الحثى حيث يتأخر التيار عن الجهد) وتعتبر سالبة (للحمل السعوى حيث يتقدم التيار الجهد . ومن المعتاد دائماً تمييز Q بقيمتها وبنوع الحمل . فمثلاً فإن 100-k var حثى تعنى أن Q = 100 k var ، 100 kvar سعوى تعنى Q = -100 kvar .

مثـــــال 10.5 إذا كان الجهد والتيار لحمل هما $V_{eff} = 110$ V ، $I_{eff} = 20\ L\text{-}50°$ A . أوجد P ، Q .

$$P = 110(20 \cos 50°) = 1414 \text{ W} \qquad Q = 110(20 \sin 50°) = 1685 \text{ var}$$

10.5 ملخص القدرة للتيار المتردد فى دوائر R، L، C

ملخص قدرة التيار المتردد فى المقاومات والملفات والمكثفات مذكورة فى جدول 10-1 وقد استخدمنا الرموز V_{eff} ، I_{eff} لتشمل زوايا الوجه والعمود الأخير فى جدول 10-1 هو S = VI حيث S تسمى القدرة الظاهرية وستناقش S بتفصيل أكثر فى بند 10.7 .

جـــدول 10-1

$v = (V\sqrt{2})\cos\omega t$ $\quad$ $\mathbf{V}_{eff} = V\angle 0°$

$i = (I\sqrt{2})\cos(\omega t - \theta)$ $\quad$ $\mathbf{I}_{eff} = I\angle -\theta°$

$P = VI\cos\theta$, $Q = VI\sin\theta$ and $S = VI$ (apparent power)

	Z	i	$\mathbf{I}_{eff}$	$p(t)$	P	Q	S
R	R	$\frac{V\sqrt{2}}{R}\cos\omega t$	$\frac{V}{R}\angle 0°$	$\frac{V^2}{R}(1+\cos 2\omega t)$	$\frac{V^2}{R}$	0	$\frac{V^2}{R}$
L	$jL\omega$	$\frac{V\sqrt{2}}{L\omega}\cos(\omega t - 90°)$	$\frac{V}{L\omega}\angle -90°$	$\frac{V^2}{L\omega}\sin 2\omega t$	0	$\frac{V^2}{L\omega}$	$\frac{V^2}{L\omega}$
C	$\frac{-j}{C\omega}$	$V\sqrt{2}C\omega\cos(\omega t + 90°)$	$VC\omega\angle 90°$	$-V^2C\omega\sin 2\omega t$	0	$-V^2C\omega$	$V^2C\omega$

مثـــال 10.6 : أوجد القدرة المعطاه من منبع جيبى لمقاومة R . باعتبار القيمة الفعالة والتيار هما V ، I على التوالى .

$$p_R(t) = vi_R = (V\sqrt{2})\cos\omega t(I\sqrt{2})\cos\omega t = 2VI\cos^2\omega t = VI(1+\cos 2\omega t)$$

$$= RI^2(1+\cos 2\omega t) = \frac{V^2}{R}(1+\cos 2\omega t)$$

Thus,

$$P_R = \frac{V^2}{R} = RI^2 \qquad Q = 0$$

تتغير القدرة اللحظية الداخلة للمقاومة جيباً بين القيمة صفراً والقيمة $2\,RI^2$ بتردد ضعف تردد المنبع وبقيمة متوسطة $P = RI^2$ وقد رسمت تغيرات $v(t)$ ، $P_R(t)$ فى شكل 10-5(a) .

مثـــــال 10.7 : أوجد قدرة التيار المتردد الداخلة فى الملف L .

$$= \frac{V^2}{L\omega} \sin 2\omega t$$

وبذلك

$$P = 0 \qquad Q = VI = \frac{V^2}{L\omega} = L\omega I^2$$

وتتغير القدرة اللحظية الداخلة للملف جيبياً بين القيمة Q ، -Q بضعف تردد المنبع وبقيمة متوسطة = صفراً انظر شكل (b)10-5 .

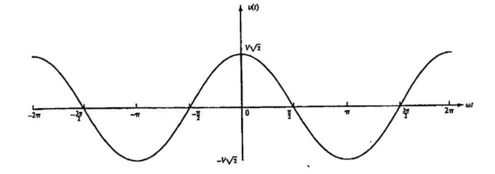
مثـــــال 10.8 : أوجد قدرة التيار المتردد المعطاه فى المكثف C .

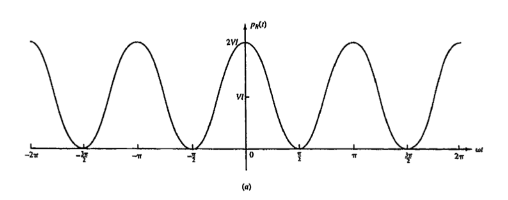
$$= -\frac{I^2}{C\omega} \sin 2\omega t$$

وبالمثل

$$P = 0 \qquad Q = -VI = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega V^2$$

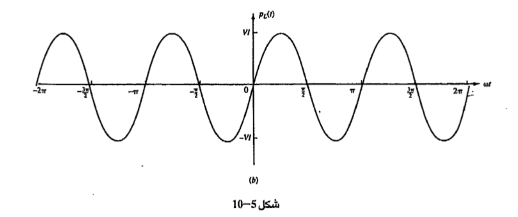
وبالمثل كما فى الملف فإن تغير القدرة اللحظية الداخلة للمكثف يكون جيبياً بين -Q ، Q بضعف تردد المنبع وقيمة متوسطة تساوى صفراً . انظر شكل (c)10-5 .





$p_R(t)$
2VI
VI
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
ωt

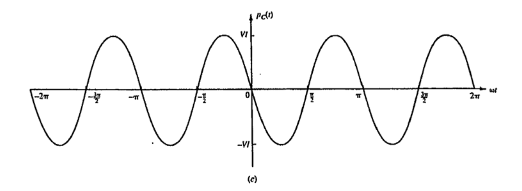
(a)



$p_L(t)$
VI
$-VI$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
ωt

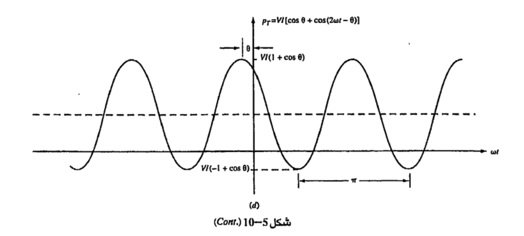
(b)

شکل 5–10



$p_C(t)$
VI
$-VI$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
ωt

(c)



شكل 5—10 (Cont.)

10.6 تبادل الطاقة بين الملف والمكثف

إذا تم تغذية ملف ومكثف متصلين على التوازى بنفس جهد التيار المتردد أو اتصلا على التوالى بنفس منبع للتيار فإن القدرة الداخلة للمكثف تصنع الزاوية °180 بالنسبة للقدرة الداخلة للملف ويعبر عن ذلك بالإشارات المختلفة للقدرة الغير فعالة Q لكل من الملف والمكثف. وفى هذه الحالات سيتبادل كلاً من الملف والمكثف الطاقة كل مع الآخر عن طريق منبع التيار المتردد. فيتبع ذلك بالتالى نقص للقدرة الغير فعالة المسحوبة من المنبع لمجموعة LC وبالتالى يحسن معامل القدرة. انظر بندى 10.8 ، 10.9 .

مثـــال 10.9 : أوجد القدرة الكلية اللحظية p(t) ، القدرة المتوسطة P والقدرة الغير فعالة Q التى يعطيها المنبع $v = (V\sqrt{2})\cos\omega t$ لمجموعة التوازى RLC.

القدرة اللحظية الكلية : $p_T = vi = v(i_R + i_L + i_C) = p_R + p_L + p_C$

وبالتعويض عن R_R ، P_L ، P_C التى حصلنا عليها من الأمثلة 10.6 ، 10.7 ، 10.8 على الترتيب فنحصل على :

$$p_T = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t) + V^2\left[\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)\sin 2\omega t\right]$$

القدرة المتوسطة هى : $P_T = P_R = V^2/R$

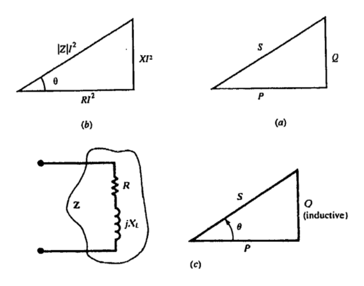
القدرة الغير فعالة هى :

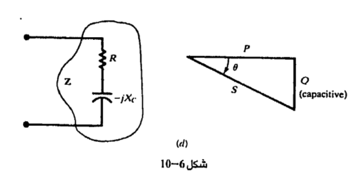
$$Q_T = Q_L + Q_C = V^2\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right) \qquad (12)$$

وفى حالة أن يكون $(1/L\omega) - C\omega = 0$ فإن القدرة الغير فعالة الكلية تساوى صفراً شكل 10-5(d) يبين $p_T(t)$ لحمل ذو معامل قدرة متقدم .

10.7 القدرة المركبة والظاهرية ومثلث القوى

تلعب مركبة القدرة Q ، P أدوار مختلفة رغم أنهما لا يضافان إلي بعضهما ومع هذا فإنه يمكن تحصيلها معاً بشكل المتجهات الذى يسمى القدرة المركبة S وتعرف بالتالى : $S = P + JQ$ والقيمة $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = V_{eff}I_{eff}$ وهى تسمى أيضاً بالقدرة الظاهرية ويعبر عنها بوحدات فولت أمبير (VA) والقيم الحسابية للثلاثة S ، P ، Q يمكن تمثيلها هندسياً بالوتر والضلع الأفقى والضلع الرأسى على التوالى لمثلث قائم الزاوية (يُسمى مثلث القوى) كم هو مبين فى شكل 10-6(a) . ويمكن أن يكون مثلث القوى هذا هو مثلث المعاوقات Z بقسمة كل ضلع منها على I^2_{eff} كما هو مبين بشكل 10-6(b) ومثلثى القدرة للحمل الحثى والحمل السعوى مبينان فى شكلى 10-6(c) ، (d) على التوالى :





(d)

شكل 10-6

ومن السهل إثبات أن $S = V_{eff}I^*_{eff}$ حيث V_{eff} هى القيمة المركبة الفعالة للجهد I^*_{eff} هو القيمة المركبة المرافقة للتيار الفعال . والعلاقة المكافئة هى $S = I^2_{eff}Z$.

وباختصار العلاقات السابقة نصل إلى :

القدرة المركبة $$S = V_{eff}I^*_{eff} = P + jQ = I^2_{eff}Z \qquad (13)$$

القدرة الحقيقية $$P = Re[S] = V_{eff}I_{eff}\cos\theta \qquad (14)$$

القدرة الغير فعالة $$Q = Im[S] = V_{eff}I_{eff}\sin\theta \qquad (15)$$

القدرة الظاهرية $$S = V_{eff}I_{eff} \qquad (16)$$

مثـــال 10.10 : (أ) جهد جيبى له القيمة $V_{eff} = 10$ V متصل على طرفى المقاومة $Z_1 = 1 + j$ كما هو مبين شكل 10-7(a) أوجد كلا من i_1 ، I_{1eff}، $p_1(t)$، P_1 ، Q_1 معامل القدرة pf_1 ، S . (ب) أعد حل الجزء (أ) بعد استبدال الحمل Z_1 بالحمل $Z_2 = 1 - J$ كما هو مبين شكل 10-7(b) . (جـ) أحد حل الجزء (أ) بعد توصيل كلاً من Z_1 ، Z_2 معاً على التوازى كما هو مبين شكل 10-7(c) .

ضع $v = 10\sqrt{2}\cos\omega t$.

(أ) انظر شكل 10-7(a)

$\mathbf{Z}_1 = \sqrt{2}\angle 45^\circ$

$i_1 = 10\cos(\omega t - 45^\circ)$

$\mathbf{I}_{1,\text{eff}} = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ$

$p_1(t) = (100\sqrt{2})\cos\omega t\cos(\omega t - 45^\circ)$
$= 50 + (50\sqrt{2})\cos(2\omega t - 45^\circ)\text{ W}$

$P_1 = V_{\text{eff}} I_{1,\text{eff}} \cos 45^\circ = 50\text{ W}$

$Q_1 = V_{\text{eff}} I_{1,\text{eff}} \sin 45^\circ = 50\text{ var}$

$\mathbf{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 50 + j50$

$S_1 = |\mathbf{S}_1| = 50\sqrt{2} = 70.7\text{ VA}$

$\text{pf}_1 = 0.707$ lagging

(ب) انظر شكل 10-7(b)

$\mathbf{Z}_2 = \sqrt{2}\angle -45^\circ$

$i_2 = 10\cos(\omega t + 45^\circ)$

$\mathbf{I}_{2,\text{eff}} = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$

$p_2(t) = (100\sqrt{2})\cos\omega t\cos(\omega t + 45^\circ)$
$= 50 + (50\sqrt{2})\cos(2\omega t + 45^\circ)\text{ W}$

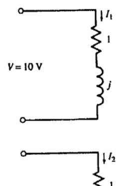
$P_2 = V_{\text{eff}} I_{2,\text{eff}} \cos 45^\circ = 50\text{ W}$

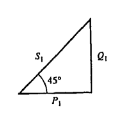
$Q_2 = -V_{\text{eff}} I_{2,\text{eff}} \sin 45^\circ = -50\text{ var}$

$\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 50 - j50$

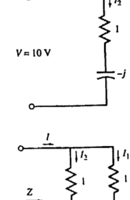
$S_2 = |\mathbf{S}_2| = 50\sqrt{2} = 70.7\text{ VA}$

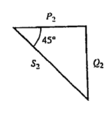
$\text{pf}_2 = 0.707$ leading



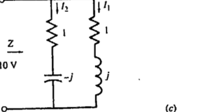


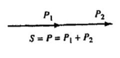
(a)





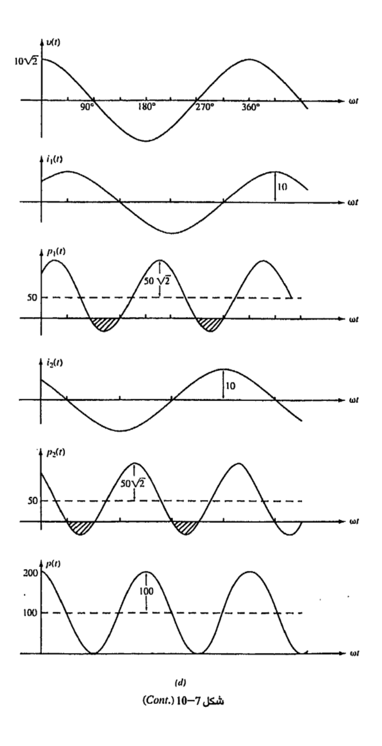
(b)





(c)

شكل 10–7



(d)

شکل 10–7 (Cont.)

(جـ) انظر شكل 10-7(c)

$$
\begin{aligned}
Z &= Z_1 \| Z_2 = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j)+(1-j)} = 1 \\
i &= 10\sqrt{2}\cos \omega t \\
\mathbf{I}_{eff} &= 10 \\
p(t) &= 200\cos^2 \omega t = 100 + 100\cos 2\omega t \text{ W} \\
P &= V_{eff} I_{eff} = 100 \text{ W} \\
Q &= 0 \\
\mathbf{S} &= P = 100 \\
S &= |\mathbf{S}| = 100 \text{ VA} \\
\text{pf} &= 1
\end{aligned}
$$

يمكن استنتاج نتائج الجزء (جـ) من ملاحـظة أنه عند توصيل Z_1 ، Z_2 على التـوازى $(Z_1 \| Z_2)$ فإن $i = i_1 + i_2$ وبالتالى فإن:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= p_1(t) + p_2(t) \\
&= [50 + (50\sqrt{2})\cos(2\omega t - 45^\circ)] + [50 + (50\sqrt{2})\cos(2\omega t + 45^\circ)] \\
&= 100 + 100\cos 2\omega t \text{ W} \\
P &= P_1 + P_2 = 50 + 50 = 100 \text{ W} \\
Q &= Q_1 + Q_2 = 50 - 50 = 0 \\
S &= 100 < S_1 + S_2
\end{aligned}
$$

مثلثات القوى مبينة أشكال 10-7(a) ، (b) ، (c) . وشكـل 10-7(d) يبين رسم علاقـات υ ، i ، p للأحمال الثلاثة .

مثـــــال 10.11 : شبكة غير فعالة لها المعاوقة المكافئة $Z = 3 + j4\Omega$ وجهد منبع

$$\upsilon = 42.5\cos(1000t + 30^\circ)$$

أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة .

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{42.5}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ \quad \text{V}$$

$$\mathbf{I}_{eff} = \frac{\mathbf{V}_{eff}}{\mathbf{Z}} = \frac{(42.5/\sqrt{2})\angle 30^\circ}{5\angle 53.13^\circ} = \frac{8.5}{\sqrt{2}}\angle -23.13^\circ \quad \text{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff} = 180.6\angle 53.13^\circ = 108.4 + j144.5$$

وبذلك فإن P = 108.4 W ، Q = 144.5 var (حثى) ، S = 180.6 VA ، ومعامل قدرة متأخر PF = cos 53.13° = 0.6 .

10.8 الشبكات المتصلة على التوازى

تعتبر القدرة المركبة S ذات فائدة فى تحليل الشبكات العملية فمثلاً فإن سحب القدرة المنزلية على نفس خطوط القدرة ممثلة كما فى شكل 8-10 .

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff} = \mathbf{V}_{eff}(\mathbf{I}^*_{1,eff} + \mathbf{I}^*_{2,eff} + \cdots + \mathbf{I}^*_{n,eff})$$
$$= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_n$$

والتى منها :

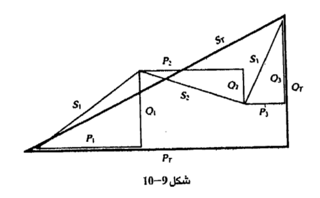
$$P_T = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$
$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$
$$\text{pf}_T = \frac{P_T}{S_T}$$

1 2 3 n
I_{eff} V_{eff}
P_1 Q_1 P_2 Q_2 P_3 Q_3 P_n Q_n

شكل 8-10

هذه النتائج (والتى تصلح أيضاً للشبكات المتصلة على التوالى) توضح أن مثلث القوى للشبكة يمكن الحصول عليه بتوصيل مثلثات القوى لأفرعها المختلفة من وتر إلى وتر. وفى المثال المبين شكل 9-10 حيث n = 3 باعتبار الفرع 1 ، 3 حثى والفرع 2 سعوى. فى هذا المخطط يمكن أن يتحول المثلث لمجرد خط مستقيم إذا كان أحد المركبتين R أو X صفراً.

وإذا كانت معلومات القدرة لكل فرع على حده ليست هامة فإنه يمكن استبدال الشبكة بالمسامحة المكافئة وهى تستخدم مباشرة لحساب S_T .



شكل 9–10

مثـــال 10.12 : وصلت ثلاث أحمال على التوازى لخط جهده $6\text{-k }V_{eff}$ تيار متردد كما هو مبين بشكل 8-10 فإذا كان

$P_1 = 10\text{ kW}, pf_1 = 1$ ، $P_2 = 20\text{ kW}, pf_2 = 0.5$ تأخر ، $P_3 = 15\text{ kW}, pf_3 = 0.6$ تأخر.

أوجد P_T ، Q_T ، S_T ، pf_T والتيار I_{eff} .

نوجد أولاً القدرة الغير فعالة لكل حمل .

$$pf_1 = \cos\theta_1 = 1 \qquad \tan\theta_1 = 0 \qquad Q_1 = P_1 \tan\theta_1 = 0\text{ kvar}$$
$$pf_2 = \cos\theta_2 = 0.5 \qquad \tan\theta_2 = 1.73 \qquad Q_2 = P_2 \tan\theta_2 = 34.6\text{ kvar}$$
$$pf_3 = \cos\theta_3 = 0.6 \qquad \tan\theta_3 = 1.33 \qquad Q_3 = P_3 \tan\theta_3 = 20\text{ kvar}$$

وبالتالى فإن P_T ، Q_T ، S_T ، pf_T تكون :

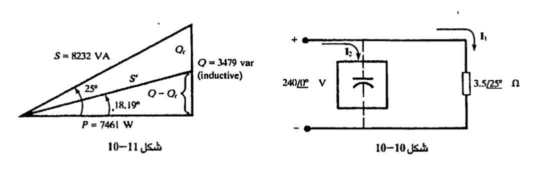
$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 + 45\text{ kW}$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34.6 + 20 = 54.6\text{ kvar}$$
$$S_T = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{45^2 + 54.6^2} = 70.75\text{ kVA}$$
$$pf_T = P_T/S_T = 0.64 = \cos\theta,\ \theta = 50.5^\circ\ \text{lagging}$$
$$I_{eff} = S/V_{eff} = (70.75\text{ kVA})/(6\text{ kV}) = 11.8\text{ A}$$
$$I_{eff} = 11.8\underline{/-50.5^\circ}\ \text{A}$$

ويمكن إيضاً إيجاد التيار $I = I_1 + I_2 + I_3$ ومع هذا فإن هذه الطريقة تستغرق وقتاً طويلاً .

10.9 تحسين معامل القدرة

يُغذى الاستهلاك الصناعى بدوائر ثلاثية الأوجه بينما يُغذى الاستهلاك المنزلى والتجارى بدوائر الوجه الواحد. ولما كان قياس الطاقة والمحاسبة يختلف عملياً لدى شركات توزيع الطاقة فإن عضو قياس ومحاسبة الطاقة عملياً بين هذه الاستخدامات فإن كبار المستهلكين يجدون أنه من الأفضل إنقاص المركبة المتعامدة للقدرة فى مثلث القوى والتى تمثل القدرة الغير فعالة وهو ما يسمى «تحسين معامل القدرة. وغالباً ما يكون للنظم الصناعية مركبة حثية كبيرة وذلك بسبب الأعداد الكبيرة من المحركات. وكل حمل على حده يمكن أن يكون إما مقاومة مادية خالصة ذو معامل قدرة الوحدة أو يكون مقاومة مع ممانعة حثية حيث يكون معامل القدرة متأخر. وحيث أن جميع الأحمال تتصل على التوازى فتكون المعاوقة المكافئة مؤدية لتيار متأخر وبالتالى لمركبة قدرة حثية Q. ولتحسين معامل القدرة فإنه يتم توصيل مكثفات فى الثلاث أوجه فى النظام إما فى الجهة الابتدائية أو الثانوية للمحول الرئيسى، وبذلك فإن الحمل الكلى للمنشأة بالإضافة إلى تيارات المكثفات يؤدى إلى جعل قدرة المنبع تقترب من معامل القدرة الوحدة.

مثـــال 10.13 : ما هى قيمة القدرة السعوية Q التى يجب إضافتها بالمكثف الموجود فى شكل 10-10 لتحسين معامل القدرة ليكون 0.95 تأخر.



شكل 10—11   شكل 10—10

قبل إضافة المكثف $C = 0.906$, $pf = \cos 25°$ تأخر.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{240\angle 0^\circ}{3.5\angle 25^\circ} = 68.6\angle -25^\circ \quad \text{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{Ieff} = \left(\frac{240}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\right)\left(\frac{68.6}{\sqrt{2}}\angle +25^\circ = 8232\angle 25^\circ\right) = 7461 + j3479$$

بعد التحسين يكون لمثلث القوى نفس قيمة P ولكن تكون الزاوية $\cos^{-1} 0.95 = 18.19°$. (انظر شكل 11-10).

$$\frac{3479 - Q_c}{7461} = \tan 18.19° \qquad \text{or} \qquad Q_c = 1027 \text{ var (capacitive)}$$

القيمة الجديدة للقدرة الظاهرية هى : S' = 7854 VA بالمقارنة بالقيمة السابقة S = 8232 والخفض 378 VA تعطى النسبة المئوية 4.6%.

تقدر القدرة للمحولات ونظم التوزيع ومولدات شركات إنتاج الطاقة بالقيم kVA أو MVA وبالتالى فإن التحسين فى معامل القدرة سيؤدى إلى خفض kVA فى التوليد أو الإرسال مما يؤدى إلى إمكانية استخدامها لخدمة مستهلكين آخرين وهذا هو السبب الكامن وراء حساب سعر أعلى لبعض المستهلكين بمعامل قدرة منخفض. والدراسة الاقتصادية لتكاليف المكثف المستخدم غالباً ما تثبت أفضلية استخدامها. وعموماً فإن نتائج مثل هذه الدراسة تبين ما إذا كان من الأفضل استخدام المكثف وما هو معامل القدرة الناتج.

مثـــال 10.14 : حمل P = 1000 W عند معامل قدرة تأخر pf = 0.5 يغذى من منبع 5-kV. وصل مكثف على التوازى لتحسين معامل القدرة إلى 0.8. أوجد الخفض فى التيار المسحوب من المولد.

قبل التحسين

$$P = 1000 \text{ kW}, \cos\theta = 0.5, S = P/\cos\theta = 2000 \text{ kVA}, I = 400 \text{ A}$$

بعد التحسين

$$P = 1000 \text{ kW}, \cos\theta = 0.8, S = P/\cos\theta = 1250 \text{ kVA}, I = 250 \text{ A}$$

وبذلك فإنه لنفس القدرة الحقيقية فإن التيار سيتعامل بالقيمة :

(400 - 250) / 400 = 0.375 أو 37.5%

مثــــال 10.15 : وصل حـمل رابع Q_4 على التـوازى للثلاث أحمال التى فى مثال 10.12 بحيث أصبح معامل القدرة الكلى 0.8 بينما بقيت القدرة الكلية كما هى. أوجد Q_4 والقيمة الناتجة للقدرة S ناقش التأثير على التيار.

وجدنا فى مثال 10.12 كلاً من القدرة الحقيقية الكلية والغير حقيقية الكلية هما $P = P_1 + P_2 + P_3$ ، $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ على الترتيب. وعند التعويض أضفنا الحمل Q_4 (ومعه $P_4 = 0$) بحيث يكون معامل القدرة الجديد $pf = \cos\theta = 0.8, Q = 36.87°$ وبالتالى :

$$\tan 36.87° = P/(Q + Q_4) = 45/(54.6 + Q_4) = 0.75 \qquad Q_4 = -20.85 \text{ kvar}$$

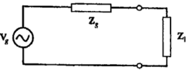
تم تلخيص النتائج فى جدول 10-2 ، وبإضافة حمل التعويض Q_4 تقلل القدرة الغير فعالة من 54.6 Kvar إلى 33.75 kvar ويحسن معامل القدرة وهذا أيضاً يقلل القدرة الظاهرية S من 70.75 kVA إلى 56.25 kVA وبالتالى يقل التيار بنفس النسب.

جـــدول 10-2

Load	*P*, kW	pf	*Q*, kvar	*S*, kVA
#1	10	1	0	10
#2	20	0.5 lagging	34.6	40
#3	15	0.6 lagging	20	25
#(1 + 2 + 3)	45	0.64	54.6	70.75
#4	0	1 leading	−20.85	20.85
Total	45	0.8	33.75	56.25

10.10 أقصى قدرة منقولة

تكون القدرة المعطاه لحمل Z_1 من مولد جيبى ذو جهد عدم حمل V_g ومعاوقة داخلية $Z_g = R + jX$ ذات قيمة عظمى حينما تكون Z_1 مساوية للقيمة المركبة المرافقة للقيمة Z_g وحيث تكون $Z_1 = R - jX$. وبالتالى فإن متوسط القيمة العظمى المعطاه للحمل Z_1 هى $P_{max} = V^2_g / 4R$.



شكل 12–10

مثـــال 10.16 : مولد له $V_g = 100$ V (rms) ، $Z_g = 1 + j$ يغذى حملاً $Z_1 = 2$ (شكل 10-12) . (أ) أوجد القدرة المتوسطة P_{Z1} (المستهلكة فى Z_1) والقدرة P_g (المستنفذة فى Z_g) ، P_T (التى يعطيها المولد) . (ب) أحسب قيمة حملاً ثانياً Z_2 بحيث حينما يتصل على التوازى مع Z_1 فإن المعاوقة الكلية تكون $Z = Z_1 \parallel Z_2 = Z^*_g$. (جـ) مع توصيل Z_2 على التوازى مع Z_1 فى (ب) أوجد القدرات P_Z ، P_{Z1} ، P_{Z2} (المستهلكة فى Z ، Z_1 ، Z_2 على التوالى) و P_g (المستهلكة فى Z_g) و P_T (المستهلكة فى المولد) .

(أ) $|\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_g| = |2 + 1 + j| = \sqrt{10}$. Thus $\mathbf{I} = \mathbf{V}_g/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_g) = 100/(2 + 1 + j)$ and $|I| = 10\sqrt{10}$ A.

والقدرة المطلوبة هى

$$P_{Z1} = \text{Re}[\mathbf{Z}_1] \times |I|^2 = 2(10\sqrt{10})^2 = 2000 \text{ W}$$

$$P_g = \text{Re}[\mathbf{Z}_g] \times |I|^2 = 1(10\sqrt{10})^2 = 1000 \text{ W}$$

$$P_T = P_{Z1} + P_g = 2000 + 1000 = 3000 \text{ W}$$

(ب) ضع $Z_2 = a + jb$. ولإيجاد a ، b نجعل $Z_1 \parallel Z_2 = Z_g = 1 - j$ ، ومن ثم :

$$\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{2(a + jb)}{2 + a + jb} = 1 - j$$

ومنها $a - b - 2 = 0$ ، $a + b + 2 = 0$ وبحل هاتين المعادلتين الآنيتين فإن $a = 0$ ، $b = -2$
وبالتعويض فى المعادلة السابقة فإن $Z_2 = -j\,2$.

(جـ)

$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \| \mathbf{Z}_2 = 1 - j$ and $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_g = 1 - j + 1 + j = 2$. Then, $I = V_g/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_g) = 100/(1 - j + 1 + j) = 100/2 =$ 50 A, and so

$$P_Z = \text{Re}[\mathbf{Z}] \times I^2 = 1 \times 50^2 = 2500 \text{ W} \qquad P_g = \text{Re}[\mathbf{Z}_g] \times I^2 = 1 \times 50^2 = 2500 \text{ W}$$

لإيجاد P_{Z1} ، P_{Z2} نوجد أولاً V_Z على طرفى Z : $V_2 = IZ = 50\,(1 - j)$ ثم وأيضاً: $I_{Z1} = V_2 / Z_1 = 50\,(1 - j) / 2 = (25\sqrt{2})\ \angle{-45^\circ}$

$$P_{Z1} = \text{Re}[\mathbf{Z}_1] \times |I_{Z1}|^2 = 2(25\sqrt{2})^2 = 2500 \text{ W} \qquad P_{Z2} = 0 \text{ W} \qquad P_T = P_g + P_{Z1} = 5000 \text{ W}$$

وبالتالى يمكن تقرير أن :

$$P_{Z2} = 0 \quad \text{and} \quad P_{Z1} = P_Z = 2500 \text{ W}$$

مسائل محلولة

10.1 التيار المرسوم فى شكل 10-2(a) يدخل المكثف 0.5 μf مع مقاومة على التوالى 1 k Ω . أوجد وارسم (أ) الجهد v على طرفى مجموعة التوالى RC ، (ب) القدرة اللحظية p الداخلة إلى R'C ، (جـ) قارن النتائج مع مثالى 10.1 ، 10.2 .

(أ) بالرجوع إلى شكل 10-2(a) ولدورة واحدة للتيار فإن الجهود تكون :

$$v_R = \begin{cases} 1 \text{ V} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ -1 \text{ V} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = \begin{cases} 2000t \quad (\text{V}) & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 4 - 2000t \quad (\text{V}) & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v = v_R + v_C = \begin{cases} 1 + 2000t \quad (\text{V}) & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 3 - 2000t \quad (\text{V}) & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \qquad \text{[See Fig. 10-13}(a)\text{]}$$

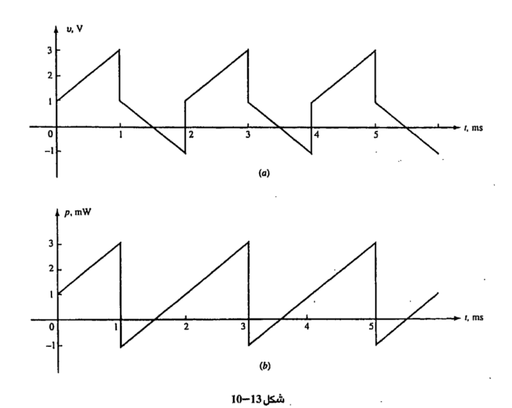
(ب) أثناء دورة واحدة .

$$p_R = Ri^2 = 1 \text{ mW}$$

$$p_C = v_C i = \begin{cases} 2000t \quad (\text{mW}) & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 4 \quad (\text{mW}) & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$p = vi = p_R + p_C = \begin{cases} 1 + 2000t \quad (\text{mW}) & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 3 \quad (\text{mW}) & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \qquad \text{[(See Fig. 10-13}(b)\text{)]}$$

(جـ) القدرة المتوسطة الداخلة للدائرة خلال دورة واحدة تساوى متوسط القدرة المستهلكة فى المقاومة وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال 10.7 وتبادل القدرة بين المنبع والدائرة خلال ذبذبة واحدة يتفق أيضاً مع الناتج الذى حصلنا عليه فى مثال 10.2 .



شكل 13–10

10.2 جهد مترددد 1-V يغذى (أ) مقاومة $1\ \Omega$، (ب) حملاً $Z = 1 + j$، (جـ) حملاً $Z = 1 - j$. أوجد P لكل من هذه الحالات الثلاثة.

(a) $P = V^2/R = 1/1 = 1$ W.

(b) $|\mathbf{Z}| = |1 + j| = \sqrt{2}$. Then $P = V^2/|\mathbf{Z}| = 1/\sqrt{2} = 0.707$ W.

(c) $|\mathbf{Z}| = |1 - j| = \sqrt{2}$. Then $P = V^2/|\mathbf{Z}| = 1/\sqrt{2} = 0.707$ W.

10.3 أوجد المعلومات الكاملة للقدرة لدائرة غير فعالة إذا استخدم معها الجهد $\upsilon = 150 \cos (\omega t + 10°)$ (V)، والتيار الناتج $i = 5.0 \cos (\omega t - 50°)$ A باستخدام القدرة المركبة.

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff} = \left(\frac{150}{\sqrt{2}}\,\underline{/10°}\right)\left(\frac{5.0}{\sqrt{2}}\,\underline{/50°}\right) = 375\,\underline{/60°} = 187.5 + j324.8$$

بالتالى فإن :

$P = 187.5$ W, $Q = 324.8$ var (inductive), $S = 375$ VA, and pf = cos 60°C = 0.50 lagging.

10.4 عنصران لدائرة متصلان على التوالى لهما متوسط قدرة 940 W ومعامل قدرة 0.707 متقدم .
حدد عنصرى الدائرة إذا كان الجهد المستخدم $\upsilon = 99.0 \cos(6000t + 30°)$ V .

الجهد الفعال المستخدم هو $99.0 / \sqrt{2} = 70$ V وبالتعويض فى $P = V_{eff} I_{eff} \cos\theta$ فإن :

$940 = (70.0) I_{eff} (0.707)$ أو $I_{eff} = 19.0$ A

ومن ثم $(19.0)^2 R = 040$ إذن $R = 2.6\ \Omega$ ولمعامل قدرة متقدم

$\theta = \cos^{-1} 0.707 = -45°$ ولذلك

$Z_1 = R - jX_C$ حيث $X_C = R \tan 45° = 2.60\ \Omega$

وأخيراً من $2.60 = 1/\omega C,\ C = 64.1\ \mu F$

10.5 أوجد عنصرى التوالى فى الدائرة التى بها التيار $i = 4.24 \cos(5000t + 45°)$ A والقدرة 180 W ومعامل القدرة هو 0.80 متأخر .

القيمة الفعالة للتيار $I_{eff} = 4.24\ \sqrt{2} = 3.0$ A ومن ثمّ

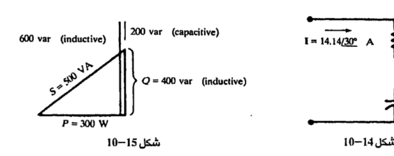
$$180 = (3.0)^2 R \qquad \text{or} \qquad R = 20.0\ \Omega$$

زاوية المعاوقة هى $\theta = \cos^{-1} 0.80 = +36.87°$ ومن ثم فإن العنصر الثانى يجب أن يكون حثياً ومن مثلث القوى .

$$\frac{Q}{P} = \frac{I_{eff}^2 X_L}{180} = \tan 36.87° \qquad \text{or} \qquad X_L = 15.0\ \Omega$$

وأخيراً من العلاقة $15 = 5000\ L$ فإن $L = 3.0$ mH

10.6 أوجد معلومات القدرة لكل عنصر فى شكل 14-10 وكون مثلث القدرة .



شكل 15–10

شكل 14–10

التيار الفعال هو 14-14 / √2 = 10 A .

$$P=(10)^2 3=300\text{ W} \qquad Q_{j6\Omega}=(10)^2 6=600\text{ var (inductive)} \qquad Q_{-j2\Omega}=(10)^2 2=200\text{ var (capacitive)}$$

$$S=\sqrt{(300)^2+(600-200)^2}=500\text{ VA} \qquad \text{pf}=P/S=0.6\text{ lagging}$$

مثلث القوى مبين في شكل 15-10 .

10.7 دائرة توالى بها $R = 10\ \Omega$ ، $X_C = 5\ \Omega$ بها منبع جهد 120 V أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة .

$$Z=\sqrt{10^2+5^2}=11.18\ \Omega \qquad I_{\text{eff}}=\frac{120}{11.18}=10.73\text{ A}$$

Then:

$$P=I_{\text{eff}}^2 R=1152\text{ W} \qquad Q=I_{\text{eff}}^2 X_C=576\text{ var (capacitive)} \qquad S=\sqrt{(1152)^2+(576)^2}=1288\text{ VA}$$

and pf = 1152/1288 = 0.894 leading.

10.8 المعاوقات $Z_1 = 5.83\ \angle -59.0^\circ\ \Omega$ ، $Z_2 = 8.94\ \angle 63.34^\circ\ \Omega$ متصلة على التوالى ويمر بها التيار الفعال 5.0 A أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة .

$$\mathbf{Z}_T=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2=7.0+j3.0\quad \Omega$$

Hence, $$P_T=(5.0)^2(7.0)=175\text{ W} \qquad Q_T=(5.0)^2(3.0)=75\text{ var (inductive)}$$

$$S_T=\sqrt{(175)^2+(75)^2}=190.4\text{ VA} \qquad \text{pf}=\frac{175}{190.4}=0.919\text{ lagging}$$

10.9 أوجد المعلومات الكاملة عن القدرة لدائرة التوازى المبينة شكل 10-16 .

بتقسيم التيار .

$$\mathbf{I}_5 = 17.88\underline{/18.43^\circ} \text{ A} \qquad \mathbf{I}_4 = 26.05\underline{/-12.53^\circ} \text{ A}$$

Then,

$$P_T = \left(\frac{17.88}{\sqrt{2}}\right)^2(5) + \left(\frac{26.05}{\sqrt{2}}\right)^2(4) = 2156 \text{ W}$$

$$Q_T = \left(\frac{17.88}{\sqrt{2}}\right)^2(3) = 480 \text{ var (capacitive)}$$

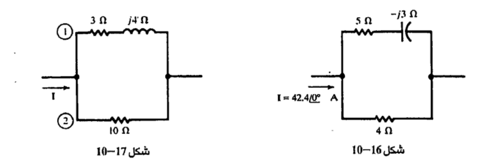
$$S_T = \sqrt{(2156)^2 + (480)^2} = 2209 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = \frac{2156}{2209} = 0.976 \text{ leading}$$

طريقة أخرى :

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{4(5-j3)}{9-j3} = 2.40 - j0.53 \quad \Omega$$

Then, $P = (42.4/\sqrt{2})^2(2.40) = 2157$ W and $Q = (42.4/\sqrt{2})^2(0.53) = 476$ var (capacitive).



شكل 10–17 شكل 10–16

10.10 أوجد معامل القدرة للدائرة المبينة شكل 10-17 .

بدون تحديد قيم معينة للجهد أو التيار فإن P ، Q ، S لا يمكن حسابها ومع ذلك فإن معامل القدرة وجيب الزاوية للمعاوقة المكافئة ويمكن حسابها كالتالى :

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(3+j4)(10)}{13+j4} = 3.68\underline{/36.03^\circ} \quad \Omega$$

$$\text{pf} = \cos 36.03^\circ = 0.809 \text{ lagging}$$

10.11 إذا كانت القدرة الكلية فى الدائرة لشكل 10-17 هى 1100 W فما هى القدرة فى كل مقاومة .

بتقسيم التيار فإن

$$\frac{I_{1,\text{eff}}}{I_{2,\text{eff}}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

and so

$$\frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \frac{I_{1,\text{eff}}^2(3)}{I_{2,\text{eff}}^2(10)} = \frac{6}{5}$$

وبالحل آنيا مع $P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100$ W يعطى $P_{3\Omega} = 600$ W ، $P_{10\Omega} = 500$ W .

10.12 أوجـد معـامل القـدرة لدائرة توازى ذات فرعين حيث أن الفرع الأول $Z_1 = 2 + j4\ \Omega$ والثانى $Z_2 = 6 + j0\ \Omega$. وإلى أى قيمة تتغير المقاومة 6 Ω لينتج معامل قدره كلى 0.90 تأخر .

حيث أن زاوية المسامحة المكافئة هى سالب زاوية المعاوقة المكافئة فإن جيب التمام يكون له نفس القيمة أى معامل القدرة .

$$\mathbf{Y}_{eq} = \frac{1}{2+j4} + \frac{1}{6} = 0.334\angle{-36.84^\circ}\quad \text{S}$$

$$\text{pf} = \cos(-36.84^\circ) = 0.80 \text{ lagging}$$

يكون معامل القدرة متأخراً لأن زاوية المعاوقة موجبة .

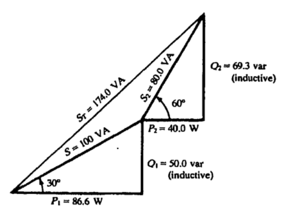
والآن عند تغيير معـامل القـدرة إلى 0.90 فـإن زاوية المسـامحـة يجب أن تكون $\cos^{-1} 0.90 = -25.84^\circ$ وبالتالى :

$$\mathbf{Y}'_{eq} = \frac{1}{2+j4} + \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{R}\right) - j\frac{1}{5}$$

requires

$$\frac{1/5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{R}} = \tan 25.84^\circ \qquad \text{or} \qquad R = 3.20\ \Omega$$

10.13 وصـــل جهـــد $28.28\angle{60^\circ}$ V لدائـرة تـــوازى ذات فرعـــين بـــها $Z_1 = 4\angle{30^\circ}\ \Omega$ ، $Z_2 = 5\angle{60^\circ}\ \Omega$. أوجد مثلثى القوى للفرعين وإدمجهما فى مثلث القوى الكلى .



شكل 18–10

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = 7.07\angle 30^\circ \ \text{A} \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = 5.66\angle 0^\circ \ \text{A}$$

$$\mathbf{S}_1 = \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ\right)\left(\frac{7.07}{\sqrt{2}}\angle -30^\circ\right) = 100\angle 30^\circ = 86.6 + j50.0$$

$$\mathbf{S}_2 = \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ\right)\left(\frac{5.66}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\right) = 80.0\angle 60^\circ = 40.0 + j69.3$$

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 126.6 + j119.3 = 174.0\angle 43.3^\circ \ \text{VA}$$

مثلثا القوى ومجموعهما مبين فى شكل 18-10 .

10.14 أوجد المعلومات الكاملة للقدرة الكلية لثلاث أحمال متصلة على التوازى الحمل # 1 250 VA ، معامل قدرة 0.5 تأخر ، الحمل 2 ≠ 180 W معامل قدرة 0.80 تقدم، الحمل 3≠ 300 VA ، 100 var (حثى) .

أحسب القدرة المتوسطة P والقدرة الغير فعالة Q لكل حمل .

حمل # 1

Given $S = 250$ VA, $\cos\theta = 0.50$ lagging. Then,

$$P = 250(0.50) = 125 \text{ W} \qquad Q = \sqrt{(250)^2 - (125)^2} = 216.5 \text{ var (inductive)}$$

حمل # 2

Given $P = 180$ W, $\cos\theta = 0.80$ leading. Then, $\theta = \cos^{-1} 0.80 = -36.87^\circ$ and

$$Q = 180 \tan(-36.87^\circ) = 135 \text{ var (capacitive)}$$

حمل # 3

Given $S = 300$ VA, $Q = 100$ var (inductive). Then,

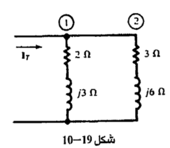
$$P = \sqrt{(300)^2 - (100)^2} = 282.8 \text{ W}$$

وبتجميع العوامل المتشابهة فإن :

$$P_T = 125 + 180 + 282.8 = 587.8 \text{ W}$$
$$Q_T = 216.5 - 135 + 100 = 181.5 \text{ var (inductive)}$$
$$\mathbf{S}_T = 587.8 + j181.5 = 615.2\underline{/17.16^\circ}$$

ولذلك فإن $S_T = 615.2$ VA and pf $= \cos 17.16^\circ = 0.955$ lagging.

10.15 أوجد المثلث الكامل للقوى والتيار الكلى لدائرة التوازى المبين شكل 19-10 إذا كان للفرع 2 . $S_2 = 1490$ VA .



شكل 19—10

From $S_2 = I_{2,\text{eff}}^2 Z_2$,

$$I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{1490}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 222 \text{ A}^2$$

وبتقسيم التيار

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{3 + j6}{2 + j3} \qquad \text{whence} \qquad I_{1,\text{eff}}^2 = \frac{3^2 + 6^2}{2^2 + 3^2} I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{45}{13}(222) = 768 \text{ A}^2$$

Then,

$$\mathbf{S}_1 = I_{1,\text{eff}}^2 \mathbf{Z}_1 = 768(2 + j3) = 1536 + j2304$$
$$\mathbf{S}_2 = I_{2,\text{eff}}^2 \mathbf{Z}_2 = 222(3 + j6) = 666 + j1332$$
$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 2202 + j3636$$

ومن ثم

$$P_T = 2202 \text{ W}, \; Q_T = 3636 \text{ var (inductive)},$$

$$S_T = \sqrt{(2202)^2 + (3636)^2} = 4251 \text{ VA} \qquad \text{and} \qquad \text{pf} = \frac{2202}{4251} = 0.518 \text{ lagging}$$

وحيث أن زاوية الوجه للجهد غير معروفة فإنه يمكن فقط إيجاد I_T . وبتقسيم التيار .

$$\mathbf{I}_2 = \frac{2 + j3}{5 + j9} \mathbf{I}_T \qquad \text{or} \qquad I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{2^2 + 3^2}{5^2 + 9^2} I_{T,\text{eff}}^2 = \frac{13}{106} I_{T,\text{eff}}^2$$

و

$$I_{T,\mathrm{eff}}^2 = \frac{106}{13}(222) = 1811\ \mathrm{A}^2 \qquad \text{or} \qquad I_{T,\mathrm{eff}} = 42.6\ \mathrm{A}$$

10-16 أوجد مثلث القوى الكامل للدائرة المبينة شكل 20-10 إذا كانت القدرة الغير فعالة الكلية 2500 var (حثى). أوجد قدرات الأفرع P_1 ، P_2.

من الأفضل إجراء حسابات عن طريق المسامحة المكافئة وذلك للحصول على مثلث القوى الكلى.

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 0.2488\underline{/-39.57^\circ}\ \ \mathrm{S}$$

Then,

$$P_T = 2500 \cot 39.57^\circ = 3025\ \mathrm{W}$$

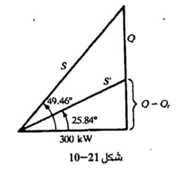
$$\mathbf{S}_T = 3025 + j2500 = 3924\underline{/39.57^\circ}\ \ \mathrm{VA}$$

معامل القدرة $pf = P_T / S_T = 0.771$ تأخر.

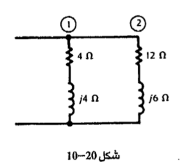
نسبة التيار $I_1 / I_2 = Y_1 / Y_2 = 0.177 / 0.0745$.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2(4)}{I_2^2(12)} = 1.88 \qquad \text{and} \qquad P_1 + P_2 = 3025\ \mathrm{W}$$

ومنها $P_1 = 1975$ W ، $P_2 = 1050$ W.



شكل 21–10



شكل 20–10

10.17 حمل قيمته 300 kW ومعامل قدرته 0.65 تأخر حُسّن معامل قدرته ليكون 0.90 تأخر بمكثفات على التوازى كم تكون القدرة بوحدات Kvar يجب أن تعطيها هذه المكثفات وما هى النسبة المئوية للخفض فى القدرة الظاهرية؟

نحصل أولاً على الزوايا المناظرة لمعامل القدرة .

$$\cos^{-1} 0.65 = 49.46° \qquad \cos^{-1} 0.90 = 25.84°$$

ثم (انظر شكل 10-21) .

$$Q = 300 \tan 49.46° = 350.7 \text{ kvar (inductive)}$$

$$Q - Q_c = 300 \tan 25.84° = 145.3 \text{ kvar (inductive)}$$

لذلك $Q_C = 205.4$ kvar (سعوى) ولذلك :

$$S = \frac{300}{0.65} = 461.5 \text{ kVA} \qquad S' = \frac{300}{0.90} = 333.3 \text{ kVA}$$

وبذلك يكون الخفض

$$\frac{461.5 - 333.3}{461.5}(100\%) = 27.8\%$$

10.18 أوجد قيمة المكثف C اللازم لتحسين معامل القدرة ليكون 0.95 فى الدائرة المبينة شكل 10-22 إذا كان الجهد للدائرة 120 V والتردد 60 Hz .

طريقة المسامحة هى الأفضل فى الحل .

$$Y_{eq} = j\omega C + \frac{1}{20\angle 30°} = 0.0433 - j(0.0250 - \omega C) \quad \text{(S)}$$

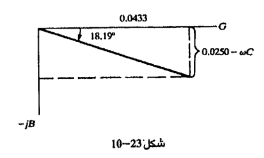
مخطط المسامحات مبين فى شكل 10-23 ويؤدى للخطوة التالية :

$$\theta = \cos^{-1} 0.95 = 18.19°$$

$$0.0250 - \omega C = (0.0433)(\tan 18.19°)$$

$$\omega C = 0.0108$$

$$C = 28.6\ \mu\text{F}$$



شكل 10-23

+
V_{eff} = 120 V
$-jX_C$
$20\angle 30°$ Ω
−

شكل 10-22

10.19 دائرة بها المعاوقة $Z = 10.0 \angle 60^\circ\ \Omega$ وتم تحسين معامل القدرة لها بمكثف على التوازى ممانعته السعوية $20\ \Omega$. ما هى السبة المئوية للخفض للتيار الناتج؟

حيث أن $I = VY$ فإنالخفض فى التيار يمكن الحصول عليه من نسبة المسامحات قبل وبعد إضافة المكثفات .

$$Y_{before} = 0.100\angle{-60^\circ}\ \text{S} \qquad \text{and} \qquad Y_{after} = 0.050\angle{90^\circ} + 0.100\angle{-60^\circ} = 0.062\angle{-36.20^\circ}\ \text{S}$$

$$\frac{I_{after}}{I_{before}} = \frac{0.062}{0.100} = 0.620$$

وبذلك تكون نسبة الخفض % 38 .

10-20 إذا كان معدل القدرة العظمى لمحول 25 KVA ويغذى حملاً 12 kW عند معامل قدرة 0.60 تأخر ما هى النسبة المئوية التى يمثلها هذا الحمل بالنسبة لقدرة المحول؟ وما هى كمية القدرة (kW) التى يجب أن تضاف للحمل ذو معامل القدرة الوحدة حتى يصل المحول إلى قدرته المقننة ؟

للحمل 12 kW ، S = 12/0.60 = 20 KVA وبذلك يكون المحول عند = (100%) (20/25) 80% من الحمل الكامل .

وإضافة حمل جديد عند معامل قدرة الوحدة لا يغير فى القدرة الغير فعالة .

$$Q = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16 \text{ kvar (inductive)}$$

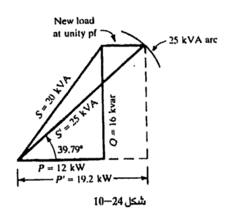
وبذلك عند القدرة العظمى للمحول فإن :

$$\theta' = \sin^{-1}(16/25) = 39.79^\circ$$

$$P' = 25 \cos 39.79^\circ = 19.2 \text{ kW}$$

$$P_{add} = 19.2 - 12.0 = 7.2 \text{ kW}$$

لاحظ أن القيمة العظمى بوحدات KVA مبينة شكل 24-10 عن طريق منحنى دائرة نصف قطرها 25 يقطع الخط الأفقى الذى يبين القيمة الجديدة للحمل عن معامل القدرة الوحدة .



شكل 24–10

10-21 بالرجوع إلى مسألة 20-10 إذا كان الحمل الإضافي معامل قدرته 0.866 تقدم ما هي قيمته KVA التي تضاف بدون زيادة قدرة المحول؟

القدرة الأصلية $S = 12 + j\ 16$ KVA ويكون الحمل المضاف .

$$\mathbf{S}_2 = S_2\underline{/-30^\circ} = S_2(0.866) - jS_2(0.500) \quad \text{(kVA)}$$

القدرة الكلية هي $S_T = (12 + j\ 0.866\ S_2) + j\ (16 - 0.500\ S_2)$ KVA ثم

$$S_T^2 = (12 + 0.866 S_2)^2 + (16 - 0.500 S_2)^2 = (25)^2$$

والتي تعطي $S_2 = 12.8$ KVA .

10-22 محرك تأثيري له قدرة طرح فرملية 1.5 kW وجودة 85% وكان معامل القدرة عند هذا الحمل 0.80 تأخر . أوجد معلومات قدرة الدخل .

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = 0.85 \qquad \text{or} \qquad P_{in} = \frac{1.5}{0.85} = 1.765 \text{ kW}$$

من مثلث القوى

$$S_{in} = \frac{1.765}{0.80} = 2.206 \text{ kVA} \qquad Q_{in} = \sqrt{(2.206)^2 - (1.765)^2} = 1.324 \text{ kvar (inductive)}$$

تحتوى الدائرة للمحرك التأثيرى على مقاومة متغيرة كدالة فى الحمل على محور الدوران وبذلك يكون معامل القدرة متغيراً من القيمة 0.30 عند بدء الحركة إلى القيمة 0.85 عند الحمل الكامل .

مسائل إضافية

10-23 دائرة بها الجهد $\upsilon = 14.14 \cos \omega t$ (V) والذي ينشأ عنه التيار $i = 19.1 \cos (\omega t - 14.05^\circ)$ mA أوجد مثلث القوى الكامل.

الجواب: تأخر $pf = 0.970$ (حثى) $P = 117$ mW, $Q = 29.3$ mvar.

10-24 دائرة بها الجهد $\upsilon = 340 \sin (\omega t - 60)$ V والتيار $i = 13.3 \sin (\omega t - 48.7^\circ)$ A. أوجد مثلث القوى الكامل. الجواب: (سعوى) $P = 2217$ W, $Q = 443$ var تقدم $pf = 0.891$.

10-25 دائرة توالى ذات عنصرين بها $R = 5.0\ \Omega$، $X_L = 15.0\ \Omega$ وجهد منبع 31.6 V على طرفى المقاومة. أوجد القدرة المركبة ومعامل القدرة.

الجواب: تأخر 0.316 , $200 + j\,600$ VA.

10-26 دائرة فيها المعاوقة $Z = 8.0 - j\,6.0\ \Omega$ وجهد قيمته المتجهة $70.7 \angle -900^\circ$ V أوجد القيم الكاملة لمثلث القدرة.

الجواب: (سعوى) $Q = 150$ var، $P = 200$ W، $pf = 0.8$ تأخر.

10-27 أوجد معاوقة الدائرة التى فيها القدرة المركبة $S = 5031 \angle -26.57^\circ$ VA، لجهد قيمته المتجهة $212.1 \angle 0^\circ$ V. الجواب: $4.0 - j\,2.0\ \Omega$.

10-28 أوجد المعاوقة المناظرة لقدرة ظاهرية 2500 VA ومعامل قدرة 0.76 تأخر وقيمة التيار الفعال 18.0 A. الجواب: $10.8 \angle 40.54^\circ\ \Omega$.

10-29 دائـرة تـوازى ذات فرعـين بها $Z_1 = 10 \angle 0^\circ\ \Omega$، $Z_2 = 8.0 \angle -30.0^\circ\ \Omega$ وتيـارها الكلـى $i = 7.07 \cos (\omega t - 90^\circ)$ (A). أوجد القيم الكلية لمثلث القوى.

الجواب: تقدم $pf = 0.958$ و(سعوى) $P = 110$ W , $Q = 32.9$ var.

10-30 دائرة توازى ذات فرعين بها $Z_1 = 2.0 - j\,5.0\ \Omega$، $Z_2 = 1.0 + j\,1.0\ \Omega$ أوجد مثلث القوى الكامل للدائرة إذا كانت المقاومة $2.0\ \Omega$ تستهلك 20 W.

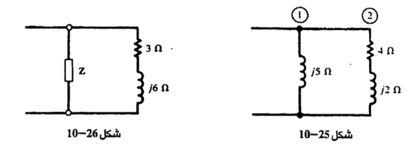
الجواب: تأخر $pf = 0.867$، (حثى) $P = 165$ W , $Q = 95$ var.

10-31 دائرة توازى ذات فرعين بها $Z_1 = 4.0 \angle -30^\circ\ \Omega$ ، $Z_2 = 5.0 \angle 60^\circ\ \Omega$. وجهد منبع قيمته الفعالة 20 V أوجد مثلثات القوى للفرعين وأيضاً للمجموعة .

الجواب : $S_T = 128.1$ VA , pf = 0.989 تأخر

10-32 أوجد القدرة المركبة للدائرة كلها المبينة شكل 10-25 إذا كان الفرع 1 يأخذ 80 kvar .

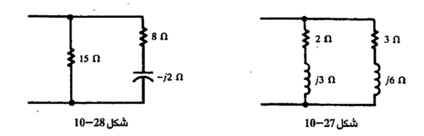
الجواب : تأخر S = 8 + j 12 KVA , pf = 0.555 .



شكل 10–26   شكل 10–25

10-33 فى الدائرة المبينة شكل 10-26 أوجد قيمة Z إذا كان $S_T = 3373$ W ومعامل قدرة 0.938 تقدم والمقاومة 3 Ω تستهلك قدرة متوسطة 666 W . الجواب : 2 = j 2 Ω .

10-34 دائرة التوازى المبينة شكل 10-27 قدرتها المتوسطة الكلية 1500 W . أوجد معلومات مثلث القوى الكلى . الجواب : تأخر S = 1500 + j 2471 VA , pf = 0.519 .



شكل 10–28   شكل 10–27

10-35 أوجد القدرة المتوسطة فى المقاومتين 15 Ω ، 8 Ω فى شكل 10-28 إذا كان متوسط القدرة الكلية فى الدائرة 2000 W . الجواب : 1277 W , 723 W .

10 دائرة توازى ذات ثلاث أفرع بها $Z_1 = 25 \angle 15° \ \Omega$ ، $Z_2 = 15 \quad 60° \ \Omega$ ، $Z_3 = 15 \angle 90° \ \Omega$
والجهد $V = 339.4 \angle -30° \ V$. أوجد القدرة الظاهرية الكلية ومعامل القدرة الكلى. الجواب:
4291 VA , 0.966 تأخر.

10- أوجد مثلث القوى الكامل للأحمال التالية المتصلة على التوازى حمل ≠1 pf = 0.8 , 5 kW ،
تأخر، حمل ≠2 (سعوى) 4 kvar ، 2kvar (سعوى)، حمل ≠3 3.6 KVA pf = 0.90
تأخر. الجواب: تأخر pf = 0.954 , 14.535 KVA .

10-3 أوجد القدرة لمثلث القوى الكامل للأحمال الثلاثة التالية المتصلة على التوازى: حمل ≠1
تأخر pf = 0.7 , 1200 VA ، حمل ≠2 تأخر pf = 0.5 , 2350 VA، حمل
≠3 pf = 1.00 , 3275 VA . الجواب: تأخر pf = .799 , S = 590 + j 444 VA .

10-3 حمل قيمته 4500 VA عند معامل القدرة متأخر 0.75 يغذيه منبع 240 V عند التردد 60 Hz .
أوجد قيمة مكثف التوازى بالميكروفاراد اللازم لتحسين معامل القدرة إلى (أ) 0.90 تأخر، (ب)
0.90 تقدم. الجواب: (أ) 61.8 μF ، (ب) 212 μF .

10-4 فى المسألة 39-10 ما هى النسبة المئوية لخفض التيار والقدرة الكلية التى نتجت فى الجزء (أ)؟
وما هى القيمة الإضافية للخفض الناتج فى الجزء (ب) الجواب: 16.1%، لا شيء.

10-4 بإضافة 20 kvar عن طريق مكثف حسن معامل القدرة لحمل ما ليكون 0.90 تأخر أوجد القدرة
المركبة قبل إضافة المكثف إذا كانت القدرة الظاهرية النهائية KVA 185 .

الجواب: S = 166.5 + j 100.6 KVA .

10-4 حمل قيمته 25 KVA لمعامل قدرة 0.80 تأخر أضيفت له مجموعة من المقاومات كأجزاء
حرارية عند معامل القدرة الوحدة. ما هى كمية الطاقة (kW) التى تستهلكها هذه المقاومات إذا
كان معامل القدرة الجديد 0.85 تأخر. الجواب: 4.2 kW

10-4 محول 500 KVA معامل قدرته عند الحمل الكامل 0.60 تأخر أضيف له مكثف لتحسين
معامل القدرة لتصل إلى 0.90 تأخر. ما هى النسبة المئوية لقدرة المحول (KVA) بعد التحسين.
الجواب: 66.7%.

10-44 محول 100 KVA يعمل عند 80% من الحمل الكامل عند معامل القدرة 0.85 تأخر ما قيمة القدرة KVA التى تضاف عند معامل القدرة 0.60 تأخر لتصل بالمحول إلى حملة الكامل؟ الجواب 21.1 KVA.

10-45 محول 250 KVA معامل قدرته عند الحمل الكامل 0.80 تأخر (أ) ما قيمة قدرة المكثفات (kvar) التى يجب أن تضاف لتحسين معامل القدرة إلى 0.90 تأخر. بعد تحسين معامل القدرة أضيف حمل جديد بمعامل قدرة 0.5 تأخر. ما قيمة القدرة المضافة (KVA) لهذا الحمل الجديد لتصل بالمحول مرة أخرى إلى قدرته المقننة وما هو معامل القدرة النهائى؟ الجواب: (أ) (سعوى) 53.1 kvar، (ب) تأخر 0.867 , 33.35 KVA.

10-46 حمل قيمته 65 KVA بمعامل قدرة متأخر اتصل بمحرك توافقى 25 KVA يعمل عند معامل القدرة 0.60. تقدم أوجد معامل قدرة الحمل 65 KVA إذا كان معامل القدرة الكلى 0.85 تأخر. الجواب: 0.585 تأخر.

10-47 حمل عبارة عن محرك تأثيرى 2000 KVA بمعامل قدرته 0.8 تأخر. أضيفت محركات توافقية 500 KVA عند معامل قدرة تقدم فإذا وصل معامل القدرة الكلى حينئذ إلى 90% تقدم فما هو معامل قدرة المحركات التوافقية. الجواب: 0.92 تقدم.

الفصل الحادى عشر

الدوائر المتعددة الأوجه

11-1 مقدمـــــه

القدرة اللحظية التى يعطيها منبع جيبى لمعاوقة هى :

$$p(t) = v(t)i(t) = V_p I_p \cos\theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) \qquad (1)$$

حيث V_p ، I_p هى القيم الفعالة (rms) لكل من v ، i على الترتيب و θ هى الزاوية بينهما . وتتذبذب القدرة بين $V_pI_p\ (1 + \cos\theta)$ ، $V_pI_p\ (-1 + \cos\theta)$. وفى نظم القوى وبالأخص عند القدرات العالية يكون من الأفضل الحصول على قدرة مستقرة منقولة من المنبع إلى الحمل . ولهذا السبب نستخدم النظم متعددة الأوجه . الأوجه المتعددة والميزة الأخرى أنه يمكن الحصول على أكثر من جهد على الخطوط . وفى نظم الأوجه المتعددة V_p ، I_p ترمز إلى الجهد والتيار الوجهى على الترتيب التى يمكن أن تختلف عن قيم الجهد والتيار فى الأوجه الأخرى . ويتعامل هذا الفصل أساساً مع دوائر الثلاث أوجه والتى تستخدم فى الصناعة ومع هذا فسيقدم أمثلة لدوائر ذات وجهين .

11-2 النظم ذات الوجهين

المولد المتزن ذو الوجهين له جهدين كلاهما له نفس القيمة العظمى والتردد ولكن زاوية الوجه بينهما °90 أو °180 . ولهذا النظام فائدة إمكانية إعطاء المستخدم اختيار جهدين ومجالين مغناطيسيين والقدرة المنقولة يمكن أن تكون ثابتة أو على شكل دفعات .

مثـــال 11-1 : مولد تيار متغير يحتوى على جهدين للمنبع لهما نفس القيمة العظمى والتردد ولكن زاوية الوجه بينهما 90° . وتم توصيل الجهدان ليكونا منبعين لهما نفس خط الرجوع بطرف مقارن واحد هو n . يقوم النظام بتغذية حملين (شكل 11-1(a)) أوجد التيارات والجهود والقدرة اللحظية والمتوسطة المعطاه .

الجهود والتيارات على أطراف المولد هى :

$$v_a(t) = V_p\sqrt{2}\cos\omega t \qquad v_b(t) = V_p\sqrt{2}\cos(\omega t - 90^\circ) \tag{2}$$

$$i_a(t) = I_p\sqrt{2}\cos(\omega t - \theta) \qquad i_b(t) = I_p\sqrt{2}\cos(\omega t - 90^\circ - \theta)$$

فى مجال المتجهات ضع $Z = |Z| \angle\theta$ ، $I_p = V_p / |Z|$ وبالتالى :

$$\mathbf{V}_{AN} = V_p\angle 0 \qquad \mathbf{V}_{BN} = V_p\angle -90^\circ \qquad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = \sqrt{2}V_p\angle 45^\circ \tag{3}$$

$$\mathbf{I}_A = I_p\angle -\theta \qquad \mathbf{I}_B = I_p\angle -90^\circ - \theta \qquad \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = I_p\sqrt{2}\angle -45^\circ - \theta$$

شكل المتجهات للجهد والتيار مبينة فى شكل 11-1(b) .

القدرات اللحظية $P_a(t)$ ، $P_b(t)$ التى يعطيها المنبعان هما :

$$p_a(t) = v_a(t)i_a(t) = V_pI_p\cos\theta + V_pI_p\cos(2\omega t - \theta)$$
$$p_b(t) = v_b(t)i_b(t) = V_pI_p\cos\theta - V_pI_p\cos(2\omega t - \theta)$$

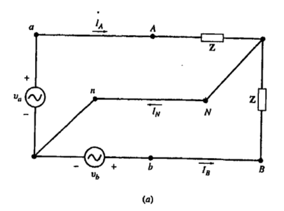
القدرة اللحظية الكلية $P_T(t)$ التى يعطيها المولد هى :

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) = V_pI_p\cos\theta + V_pI_p\cos(2\omega t - \theta) + V_pI_p\cos\theta - V_pI_p\cos(2\omega t - \theta) = 2V_pI_p\cos\theta$$

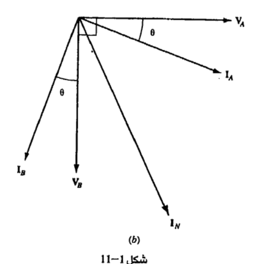
Thus,

$$p_T(t) = P_{avg} = 2V_pI_p\cos\theta \tag{4}$$

فى النظام المبين شكل 11-1(a) يمكن تغذية الحمل بمنبعين V_p ، $\sqrt{2}V_p$ ويكون تدفق الطاقة ثابت وبالإضافة إلى ذلك فإن الإزاحة الزاوية 90° بين الجهدين يمكن استخدامها للحصول على مجال مغناطيسى دوار نستخدمه خاصة فى بعض التطبيقات .



(a)



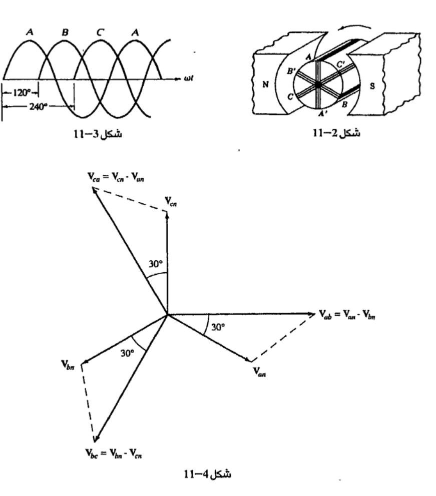
(b)

شكل 1–11

11-3 النظم ثلاثية الأوجه

مولدات الثلاث أوجه تحتوى على ثلاث منابع جهد جيبية لها نفس التردد ولكنها مزاحة عن بعضها بالزاوية °120 ويتحقق ذلك بوضع ثلاث ملفات مزاحة عن بعضها بزاوية كهربية °120 على نفس العضو الدائر ومن الطبيعى أن تكون القيم العظمى للثلاث أوجه متساوية وبذلك يكون المولد متزناً وفى شكل 2-11 وضع الثلاث ملفات موزعة بالتساوى على محيط العضو الدائر أى أن ملفاته مزاحة عن بعضها البعض بزاوية ميكانيكية 120 ولم يبين فى الشكل نهايات الملفات أو حلقات

الإنزلاق ومع هذا فإنه من المعروف عند الدوران عكس عقارب الساعة ينتج تتابع لجوانب الملفات A ، B ، C المارة تحت أجزاء الأقطاب بالترتيب ......A-B-C-A-B-C . وتعكس إشارة الجهد عند كل تغيير للقطب .



شكل 11-3

شكل 11-2

شكل 11-4

وباعتبار أن شكل القطب وشدة المجال المغناطيسى المناظرة تعمل على توليد جهود جيبية ، فإن الناتج عن الملفات الثلاثة سيكون كما فى شكل 11-3 . الجهد B يكون متأخر 120 درجة كهربية عن A ويكون C متأخراً °240 . وهذا يؤدى إلى التعاقب ABC وبتغيير إتجاه الدوران ينشأ عنه ....A-C-B-A-C-B وفى هذه الحالة يسمى تعاقب CBA .

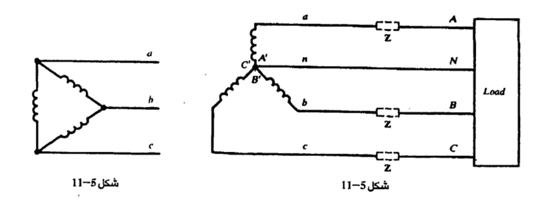
والجهود فى التعاقب ABC المتزن فى مجال الزمن والمتجهات مبينة فى المعادلة (5)، (6) على الترتيب. ومخطط المتجهات للجهود مبين شكل 4-11.

$$v_{an}(t) = (V_p\sqrt{2})\cos\omega t \qquad v_{bn}(t) = (V_p\sqrt{2})\cos(\omega t - 120°) \qquad v_{cn}(t) = (V_p\sqrt{2})\cos(\omega t - 240°) \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0} \qquad \mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-120°} \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/-240°} \quad (6)$$

11-4 نظم النجمة والدلتا

يمكن توصيل نهايات الملفات على شكل نجم (ويرمز لها أيضاً بالرمز Y انظر بند 8-11) وذلك بتوصيل الأطراف 'A' ، B' ، C معاً ويعبر عنها بطرف التعادل N وذلك بأخذ الأطراف C ، B ، A لتصبح الثلاث خطوط C ، B ، A لنظام الثلاث أوجه.



شكل 5-11 شكل 5-11

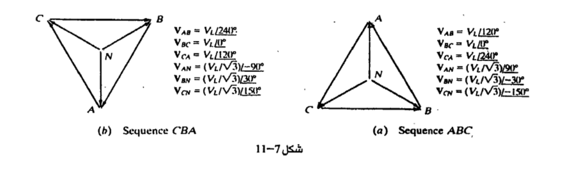
وإذا استخدمت توصيلة التعادل مع الخطوط الثلاثة فيسمى النظام ثلاث أوجه ذو أربعة أسلاك وفى شكل 5-11 تم التعبير عن الخطوط بالحروف الصغيرة a ، b ، c عند أطراف المنبع الذى يمكن أن يكون محولاً أو مولد ثلاث أوجه وتم التعبير بالحروف الكبيرة A ، B ، C عند الحمل وإذا اعتبرت معاوقة الخط فإن إتجاه التيار سيكون مثلا فى الخط aA ويرمز له بالرمز I_{aA} ومتجه الجهد المفقود للخط V_{aA}.

ويمكن توصيل نهايات ملفات المولد كما فى شكل 11-6 والتى تسمى توصيل دلتا (توصيلة Δ) للثلاث أوجه ذو الخطوط a ، b ، c وتوصيلة دلتا لمجموعة الملفات ليس لها نقطة تعادل حتى يكون النظام ذو أربعة أسلام فيما عدا عند استخدام محول Y-Δ .

11-5 متجهات الجهود

إذا تم اختيار زاوية وجه لأحد الجهود فى نظام الثلاثة أوجه فإن ذلك سيحدد زوايا الوجه للجهود الأخرى . وهذا هو المتفق عليه لتثبيت نقطة على المحور الأفقى لتبين القيمة عند t = 0 كما فى شكل 11-3 وهذا بالطبع أتفاق اختيارى . وفى هذا الفصل ستأخذ الزاوية صفر لتكون مرتبطة مع متجه الجهد للخط B بالنسبة للخط C $V_{BC} = V_L \angle 0°$.

ومبين فى مسألة 11-4 أن جهد الخط V_L يساوى $\sqrt{3}$ مضروباً فى الجهد بين الخط وخط التعادل . وجميع الجهود المتعاقبة ABC مبينة فى شكل 11-7(a) والجهود CBA مبينة فى شكل 11-7(b) . هذه المتجهات للجهد بالرجوع إلى الفصـول السابقة تعنى القيم العظمى . وفى نظام الثلاث أوجه ذو أربعة أسـلاك ، يستخدم نظام 480-V بصفة عامـة للأحمال الصناعية ونظام 208-V شائع الاستخدام فى المنشآت التجارية ، كقيم فعالـة ومحـددة . وفى هذا الفصل فإن جهد الخط فى النظام السابق سيكون $V_{BC} = 678.8 \angle 0°$ V والتى تجعل القيمة مؤثـرة = $V_{BCeff} = 678.8 / \sqrt{2}$ = 480 V والناس الذين يتعاملون بصفة دائمة فى هذا المجال يستخدمون المتجهات ذات القيم الفعالة ويكتبون $V_{BC} = 480 \angle 0°$ V .



(b) Sequence CBA — (a) Sequence ABC

شكل 11-7

11-6 حمل دلتا المتزن

إذا تم توصيل ثلاث معاوقات متطابقة كما فى شكل 8-11 فإنها ستصنع حمل دلتا متزن ويعبر عن التيارات فى المعاوقات بتيارات الأوجه أو تيارات الحمل ويكون الثلاثة متساوية فى القيمة ومختلفة عن بعضها بزاوية إزاحة °120 . وستكون تيارات الخطوط أيضاً متساوية فى القيمة ولها زاوية إزاحة عن بعضها °120 وبالاصطلاح العام فإنها تأخذ الإتجاه من المنبع إلى الحمل.

مثـــال 2-11 نظام تلافى ABC ذو ثلاث أسلاك والقيمة الفعالة للجهد 120 V به ثلاث معاوقات كل منها $5.0\,\underline{/45^\circ}\ \Omega$ متصلة بطريقة دلتا. أوجد تيارات الخطوط وارسم شكل المتجهات للجهد والتيار.

القيمة العظمى لجهد الخط $120\sqrt{2} = 169.7$ V وبالرجوع لشكل 11-7(a) فإن الجهود تكون :

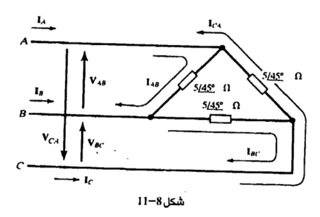
$$V_{AB} = 169.7\underline{/120^\circ}\ \text{V} \qquad V_{BC} = 169.7\underline{/0^\circ}\ \text{V} \qquad V_{CA} = 169.7\underline{/240^\circ}\ \text{V}$$

والترميز مزدوج الحروف يبين إتجاهات تيار الوجه فمثلاً I_{AB} تعنى تياراً يمر فى معاوقة من الخط A إلى الخط B . وجميع إتجاهات التيار مبينة فى شكل 8-11 وبذلك فإن تيارات الوجه هى :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{169.7\underline{/120^\circ}}{5\underline{/45^\circ}} = 33.9\underline{/75^\circ}\ \text{A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{169.7\underline{/0^\circ}}{5\underline{/45^\circ}} = 33.9\underline{/-45^\circ}\ \text{A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{169.7\underline{/240^\circ}}{5\underline{/45^\circ}} = 33.9\underline{/195^\circ}\ \text{A}$$



شكل 8-11

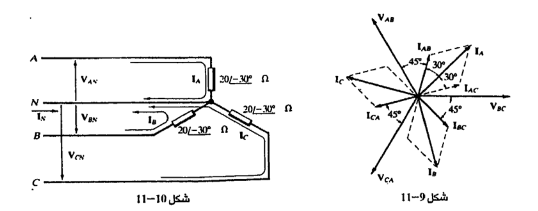
باستخدم KCL فإن تيار الخط I_A يعطى بالعلاقة :

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 33.9\angle 75^\circ - 33.9\angle 195^\circ = 58.7\angle 45^\circ \quad A$$

وبالمثل

$$I_B = 58.7\angle -75^\circ \quad A \text{ and } I_C = 58.7\angle 165^\circ \quad A.$$

وجهود الخط وجميع التيارات مبينة فى شكل المتجهات 9-11 . لاحظ بالأخص أن التيارات متزنة ولذلك فإنه عند حساب أحد تيارات الأوجه فإن جميع التيارات الأخرى يمكن الحصول عليها من خلال شكل المتجهات المتزنة . ولاحظ أيضاً $33.9 \times \sqrt{3} = 58.7$ أى أن $I_L = \sqrt{3}\, I_{ph}$ وذلك بالنسبة لحمل دلتا المتزن .



شكل 11-10 شكل 11-9

11-7 حمل نجمة المتزن ذو أربعة أسلاك

إذا تم توصيل ثلاث معاوقات متطابقة كما فى شكل 10-11 فإن ذلك يصنع ما يسمى بتوصيلة حمل نجمة المتزن . وتكون التيارات فى المعاوقات هى أيضاً تيارات الخط وتكون إتجاهاتها من المنبع إلى الحمل كما سبق .

مثـــال 3-11 نظام ثلاث أوجه CBA ذو أربعة أسلاك ، القيمة الفعالة لجهد الخط 120 V يحتوى على ثلاث معاوقات كل منها $20\angle -30^\circ\ \Omega$ متصلة على شكل نجمة (شكل 10-11)
أوجد تيارات الخط وارسم شكل المتجهات للجهد والتيار .

القيمة العظمى لجهد الخط 169.7 V وجهد كل خط بالنسبة لنقطة التعادل هى : $169.7 / \sqrt{3} =$ 98.0 V ومن شكل 11-7(b).

$$\mathbf{V}_{AN} = 98.0\angle -90^\circ \ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{BN} = 98.0\angle 30^\circ \ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{CN} = 98.0\angle 150^\circ \ \text{V}$$

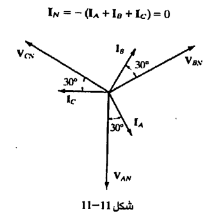
Then

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{98.01\angle -90^\circ}{20\angle -30^\circ} = 4.90\angle -60^\circ \ \text{A}$$

وبالمثل $I_B = 4.90 \angle 60^\circ$ A ، $I_C = 4.90 \angle 180^\circ$ A .

ومخطط متجهات الجهد والتيار مبينة فى شكل 11-11 . لاحظ أنه عند حساب أحد تيارات الخط فإن التيارين الباقيين يمكن استنتاجهما من التماثل فى شكل المتجهات . وجميع هذه التيارات تعود عن طريق خط التعادل وبذلك يكون تيار خط التعادل هو سالب حاصل جمع تيارات الخطوط .

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = 0$$



شكل 11–11

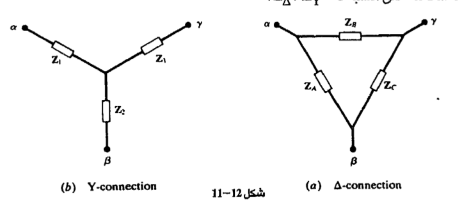
حيث أن تيار خط التعادل بالنسبة للحمل الثلاثى نجمة المتزن يكون دائماً صفراً فإنه يمكن حسابياً الاستغناء عنه بدون أى تغيير فى النتائج . وفى دوائر القدرة العملية فإنه لا بد من استعماله حيث أنه يحمل تيار عدم الاتزان لتيارات الخطوط (صغير القيمة) كما أنه يحمل تيار القصر أوتيارات الأخطاء لتشغيل نبائط الوقاية كما أنه يمنع الارتفاعات فى الجهد على أوجه الحمل وحيث أن الحسابات فى مثال 11-3 تمت بسهولة فإن تيار التعادل سيؤخذ فى الاعتبار عند حساب تيار الخط فى الأحمال المتزنة حتى ولو كانت ذو ثلاث أسلاك فقط .

11-8 التوصيلات المكافئة للنجمة والدلتا

شكل 11-12 يبين ثلاث معاوقات متصلة على شكل دلتا Δ وتم توصيل ثلاث معاوقات أخرى على شكل نجمة Y وإذا تم تعريف أطراف التوصيلتين بالرموز α ، β ، γ . ومن ثم تكون Z_1 المعاوقة المتصلة بالطرف α فى توصيلة Y وZ_C المعاوقة المقابلة للطرف α فى توصيلة Δ وهكذا . وبالنظر لأى طرفين ، فإن التوصيلتين سيكونان متكافئين إذا تساوى كل من الدخل والخرج والمعاوقات المنقولة . وبذلك يكون شرط التكافؤ كما هو مبين بالعلاقات التالية :

Y-to-Δ Transformation	Δ-to-Y Transformation
$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}$	$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}$	$Z_2 = \frac{Z_AZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1}$	$Z_3 = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$

ويجب أن نلاحظ أنه إذا تساوت المعاوقات الثلاثة لإحدى التوصيلتين فإن المعاوقات فى التوصيلة المكافئة تحقق النسبة $Z_\Delta / Z_Y = 3$.



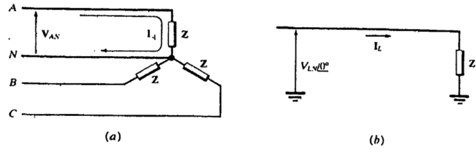
(b) Y-connection شكل 11–12 (a) Δ-connection

11-9 تمثيل احمال ثلاثية الأوجه المتزنة بدائرة مكافئة وجه واحد

شكل (a)11-13 يبين حمل نجمة متزن . وفى كثير من الحالات كما فى حسابات القدرة مثلاً فإنه يكون كافياً حساب قيمة I_L للخطوط الثلاثة ويمكن الحصول عليه من الدائرة المكافئة ذات الوجه الواحد شكل (b)11-13 والتى تمثل أحد الأوجه للنظام الأصلى باعتبار أحد الجهود المختارة وهو جهد

الوجه ذو زاوية وجه تساوى صفراً. وذلك يجعل $I_L = I_L \angle -\theta$ حيث θ هى زاوية المعاوقة. وإذا كان المطلوب هو التيارات الحقيقية I_C ، I_B ، I_A فإن زوايا الوجه لكل منها يمكن الحصول عليه بإضافة الزاوية θ- لزوايا الوجه لكل من V_{AN} ، V_{BN} ، V_{CN} كما هو مبين شكل 7-11 . لاحظ أن الزاوية على I_L تعطى معامل قدرة لكل وجه $pf = \cos\theta$.

يمكن تطبيق نفس الطريقة لحمل دلتا المتزن إذا تم استبدال الحمل بتوصيل نجمة المكافئة حيث $Z_Y = (1/3)\, Z_\Delta$ (بند 8-11) .



شكل 13-11

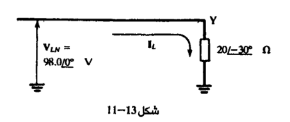
مثـــال 4-11 أعد حل مثال 3-11 بطريقة دائرة الوجه الواحد المكافئة .

بالرجوع إلى شكل 4-11 (والذى فيه الرمز Y تدل على نوع توصيلة للحمل الأصلى).

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{98.0\angle 0°}{20\angle -30°} = 4.90\angle 30° \quad A$$

من شكل 7(b)-11 فإن زوايا الوجه لكل من V_{AN} ، V_{BN} ، V_{CN} هى °90- ، °30 ، °150 لذلك :

$$I_A = 4.90\angle -60° \quad A \qquad I_B = 4.90\angle 60° \quad A \qquad I_C = 4.90\angle 180° \quad A$$



شكل 13-11

11-10 حمل دلتا الغير متزن

فى حالة أحمال دلتا الغير متزنة يتم حساب تيارات الأوجه ثم يستخدم KCL للحصول على تيارات الخط . وتكون التيارات غير متساوية ولن يكون لها التماثل كما فى الحالة المتزنة .

مثـــــال 11-5 : نظام ثلاث أوجه ذو الجهد 339.4 V والتعاقب ABC [شكل 11-15(a)] متصل بحمل موصل دلتا مع :

$$\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 0^\circ \ \Omega \qquad \mathbf{Z}_{BC} = 10\angle 30^\circ \ \Omega \qquad \mathbf{Z}_{CA} = 15\angle -30^\circ \ \Omega$$

أوجد تيارات الوجه والخط وارسم مخطط المتجهات .

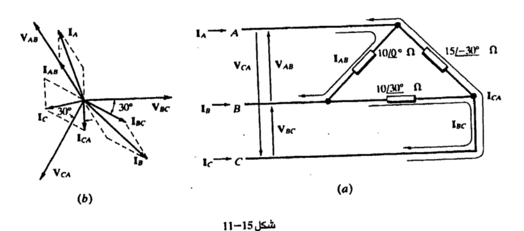
$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{339.4\angle 120^\circ}{10\angle 0^\circ} = 33.94\angle 120^\circ \quad \text{A}$$

Similarly, $\mathbf{I}_{BC} = 33.94\angle -30^\circ$ A and $\mathbf{I}_{CA} = 22.63\angle 270^\circ$ A. Then,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 33.94\angle 120^\circ - 22.63\angle 270^\circ = 54.72\angle 108.1^\circ \quad \text{A}$$

Also, $\mathbf{I}_B = 65.56\angle -45^\circ$ A and $\mathbf{I}_C = 29.93\angle -169.1^\circ$ A.

مخطط المتجهات مبين فى شكل 11-15(b) مع ملاحظة أن القيم والزاوايا مرسومة بمقياس رسم .



شكل 11-15

11-11 حمل نجمة الغير متزن

نظام أربعة أسلاك :

يمر بموصل التعادل تيار عدم اتزان لتوصيلة النجمة ويحافظ على جهد الوجه لكل وجه للحمل .
وحيث أن تيارات الخط غير متساوية فإن تيارات الوجه فى مخطط المتجهات غير متزن .

مثـــال 11-6 نظام ثلاثى CBA متصل على شكل نجمة 150 V أربعة أسلاك له .

$$\mathbf{Z}_A = 6\underline{/0^\circ}\ \ \Omega \qquad \mathbf{Z}_B = 6\underline{/30^\circ}\ \ \Omega \qquad \mathbf{Z}_C = 5\underline{/45^\circ}\ \ \Omega$$

أوجد جميع تيارات الخط وارسم مخطط المتجهات . انظر شكل (a)11-16 .

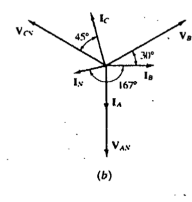
$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_A} = \frac{86.6\underline{/-90^\circ}}{6\underline{/0^\circ}} = 14.43\underline{/-90^\circ}\ \ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_B} = \frac{86.6\underline{/30^\circ}}{6\underline{/30^\circ}} = 14.43\underline{/0^\circ}\ \ \text{A}$$

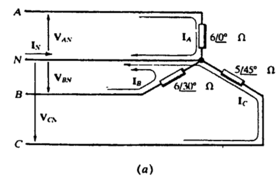
$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_C} = \frac{86.6\underline{/150^\circ}}{5\underline{/45^\circ}} = 17.32\underline{/105^\circ}\ \ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_N = -(14.43\underline{/-90^\circ} + 14.43\underline{/0^\circ} + 17.32\underline{/105^\circ}) = 10.21\underline{/-167.0^\circ}\ \ \text{A}$$

شكل (b)11-16 يبين مخطط المتجهات .



(b)



(a)

شكل 11-16

نظام ثلاث أسلاك :

بدون وجود موصل التعادل فإن المعاوقات المتصلة على شكل نجمة ستغير قيم جهد الوجه لها تغيراً ملحوظاً .

مثـــال 11-7 : شكل 11-17(a) يبين نفس النظام الذى تعاملنا معه فى مثال 11-6 فيما عدا أن خط التعادل ليس موجوداً. أوجد تيارات الخط وأوجد إزاحة جهد نقطة التعادل V_{ON} .

ترسم الدائرة مرة أخرى كما فى شكل 11-17(b) وذلك لاقتراح معادلة جهد أحد العقد باعتبار أن الجهد V_{OB} قيمة غير معروفة .

$$\frac{\mathbf{V}_{OB}-\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_A}+\frac{\mathbf{V}_{OB}}{\mathbf{Z}_B}+\frac{\mathbf{V}_{OB}+\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_C}=0$$

$$\mathbf{V}_{OB}\left(\frac{1}{6\angle 0^\circ}+\frac{1}{6\angle 30^\circ}+\frac{1}{5\angle 45^\circ}\right)=\frac{150\angle 240^\circ}{6\angle 0^\circ}-\frac{150\angle 0^\circ}{5\angle 45^\circ}$$

from which $\mathbf{V}_{OB}=66.76\angle -152.85^\circ$ V. Then,

$$\mathbf{I}_B=-\frac{\mathbf{V}_{OB}}{\mathbf{Z}_B}=11.13\angle -2.85^\circ \quad \text{A}$$

From $\mathbf{V}_{OA}+\mathbf{V}_{AB}=\mathbf{V}_{OB}$, $\mathbf{V}_{OA}=100.7\angle 81.08^\circ$ V, and

$$\mathbf{I}_A=-\frac{\mathbf{V}_{OA}}{\mathbf{Z}_A}=16.78\angle -98.92^\circ \quad \text{A}$$

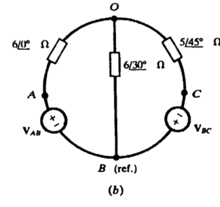
وبالمثل

$$\mathbf{V}_{OC}=\mathbf{V}_{OB}-\mathbf{V}_{CB}=95.58\angle -18.58^\circ \quad \text{V, and}$$

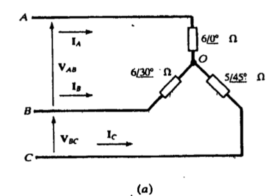
$$\mathbf{I}_C=19.12\angle 116.4^\circ \quad \text{A}$$

نقطة O رحلت من نقطة تعادل N بمتجه الجهد V_{ON} والمعطاه بالعلاقة :

$$\mathbf{V}_{ON}=\mathbf{V}_{OA}+\mathbf{V}_{AN}=100.7\angle 81.08^\circ+\frac{150}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ=20.24\angle 39.53^\circ \quad \text{V}$$



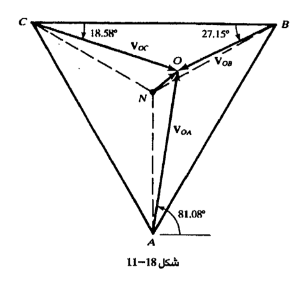
(b)



(a)

شكل 17–11

وشكل 18-11 يوضح مخطط الإتجاهات ومنه يتضح إزاحة نقطة O من مركز المثلث المتساوى الأضلاع انظر المسألة 13-11 للحصول على طريقة أخرى.



شكل 18–11

12-11 القدرة فى النظم ثلاثية الأوجه

القدرة التى يعطيها مولد ذو ثلاث أوجه متزن إلى ثلاث معاوقات متطابقة ذات زاوية وجه θ هى:

$$p_a(t) = V_p I_p \cos\theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = V_p I_p \cos\theta + V_p I_p \cos(2\omega t - 240° - \theta)$$

$$p_c(t) = V_p I_p \cos\theta + V_p I_p \cos(2\omega t - 480° - \theta)$$

$$\begin{aligned} p_T(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \\ &= 3V_p I_p \cos\theta + V_p I_p[\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - 240° - \theta) + \cos(2\omega t - 480° - \theta)] \end{aligned}$$

But $\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - 240° - \theta) + \cos(2\omega t - 480° - \theta) = 0$ for all t. Therefore,

$$p_T(t) = 3V_p I_p \cos\theta = P$$

القدرة الكلية اللحظية تساوى القدرة الكلية المتوسطة ويمكن كتابتها بدلالة جهد الخط V_L وتيار الخط I_L وبذلك:

في نظام دلتا $I_L = \sqrt{3} I_P$ ، $V_L = V_P$ وبذلك $P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$.

وفى نظام نجمه $I_L = I_P$ ، $V_L = \sqrt{3} V_P$ وبذلك $P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$.

والعلاقة $\sqrt{3} VI \cos\theta$ تعطى القدرة فى نظام الثلاث أوجه المتزنة بغض النظر عن طريقة توصيل الثلاث أوجه معاً . وتكون معامل القدرة فى نظام الثلاث أوجه هو جيب تمام الزاوية θ $(\cos\theta)$ وجهد الخط V_L فى النظم الصناعية دائماً معروف . وإذا كان الحمل متزناً فإنه يمكن حساب القدرة الكلية من تيار الخط ومعامل القدرة .

وباختصار فإنا لقدرة والقدرة الغير فعالة والقدرة الظاهرية ومعامل القدرة فى نظام الثلاثة أوجه هى :

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta \qquad Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin\theta \qquad S = \sqrt{3} V_L I_L \qquad \text{pf} = \frac{P}{S}$$

وبالطبع فإن جميع قيم الجهود والتيار هى القيم الفعالة .

11-13 قياس القدرة وطريقة استخدام جهازى واطميتر

يحتوى جهاز قياس القدرة (الوا طمتير) على ملف للجهد وملف للتيار ويتأثر بحاصل ضرب الجهد الفعال والتيار الفعال وجيب تمام الزاوية بينهما وبالتالى فإن جهاز قياس القدرة فى شكل 19-11 يبين القدرة المتوسط المعطاه إلى الشبكة الفعالة .

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos\theta = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}^*_{eff})$$

انظر بند 7-10 .

I_{eff} + V_{eff} − W Passive Network

شكل 19-11

بتوصيل جهازي لقياس القدرة فى أى خطين من الثلاث أوجه ذو الثلاث أسلاك سيعطيان القيمة الصحيحة للقدرة الكلية فى الثلاث أوجه وذلك بجمع قراءتيهما. ويقرأ الجهاز فى الإتجاه المضاد إذا كانت زاوية الوجه بين الجهد والتيار تزيد عن 90° فى هذه الحالة يمكن عكس أطراف توصيلة التيار وتكون القراءة فى هذه الحالة بقيمة سالبة عند الجمع وفى شكل 20-11 وضع الجهازي فى الخطين C ، A مع توصيل ملفى الجهد إلى الخط B وبذلك تكون قراءتيهما.

$$W_A = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{ABeff}\mathbf{I}^*_{Aeff}) = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{ABeff}\mathbf{I}^*_{ABeff}) + \text{Re}\,(\mathbf{V}_{ABeff}\mathbf{I}^*_{ACeff})$$

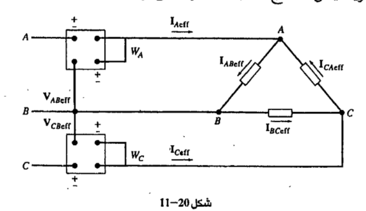
$$W_C = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{CBeff}\mathbf{I}^*_{Ceff}) = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{CBeff}\mathbf{I}^*_{CAeff}) + \text{Re}\,(\mathbf{V}_{CBeff}\mathbf{I}^*_{CBeff})$$

وعند تطبيق قانون KCL فإن $I_A = I_{AB} + I_{BC}$ ، $I_C = I_{CA} + I_{CB}$ قد استخدما لاستبدال تيارات الخط بتيارات الوجه. ويعرف الحد الأول من W_A بالرمز P_{AB} وهى القدرة المتوسطة فى الوجه AB لحمل دلتا وبالمثل فإن الحد التالى فى W_C هو P_{CB}. وبجمع المعادلتين وإعادة إضافة الحدين الأوسطين نحصل على:

$$W_A + W_C = P_{AB} + \text{Re}\,[(\mathbf{V}_{ABeff} - \mathbf{V}_{CBeff})\mathbf{I}^*_{ACeff}] + P_{CB} = P_{AB} + P_{AC} + P_{CB}$$

وبتطبيق KVL فإن $V_{AB} - V_{CB} = V_{AC}$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج التشابه للحصول على توصيلة دلتا.



شكل 20-11

الأحمال المتزنة

حينما يتم توصيل ثلاث أحمال متزنة $Z\angle\theta$ بطريقة دلتا فإن تيارات الوجه تصنع الزاوية 30° مع تيارات الخط الناتجة. ويؤول شكل 21-11 لشكل (20-11) وذلك مع افتراض التتابع ABC. ومن

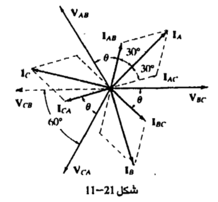
الملاحظ أن V_{AB} يتقدم I_A بالزاوية $\theta + 30°$ بينما يتقدم V_{CB} التيار I_C بالزاوية θ-30° وبالتالى فإن كلا الواطمتران سيقرأ :

$$W_A = V_{ABeff} I_{Aeff} \cos(\theta + 30°) \qquad W_C = V_{CBeff} I_{Ceff} \cos(\theta - 30°)$$

وعموماً فإنه لا يعرف تتابع الجهود بالنسبة لبعضها فى الخطين المتصل بهما الواطمتران فإن :

$$W_1 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta + 30°)$$
$$W_2 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta - 30°)$$

وهذه العلاقات مساوية أيضاً بالنسبة لتوصيلة النجمة المتزنة .



شكل 21–11

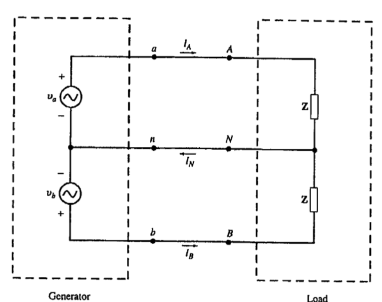
وبحذف V_{Leff} ، I_{Leff} من كلا القراءتين نحصل على :

$$\tan\theta = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}\right)$$

ولذلك فإنه يمكن الحصول مباشرة على قيمة زاوية المعاوقة θ من قراءتى الواطمتران . ولا يكون هناك أهمية لإشارة الزاوية θ نظراً لأن كلا الواطمتران 1 ، 2 اختيارای بالنسبة لقراءتى الواطمترين وعموماً فإنه عملياً فإن الحمل يكون متزناً وحثياً وعلى ذلك فإن $(\theta > 0)$.

مسائل محلولة

11.1 مولد متزن ذو وجهين شكل 22-11 يغذى حملين متطابقين فإذا كانت زاوية الوجه بين جهدى المنبع °180 بينهما. أوجد (أ) تيارات الخطوط والجهود وزوايا الوجه لها، (ب) القدرات اللحظية والمتوسطة التى يعطيها المولد.



شكل 22–11

ضع $Z = |Z|\underline{/\theta}$ ، $I_P = V_P / |Z|$

(أ) الجهود وتيارات الخط فى مجال المتجهات هى:

$$\mathbf{V}_{AN} = V_p\underline{/0} \qquad V_{BN} = V_p\underline{/-180^\circ} = -V_p\underline{/0} \qquad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 2V_p\underline{/0}$$

والآن من قيم I_P ، Z المعطاه سابقاً نحصل على:

$$\mathbf{I}_A = I_p\underline{/-\theta} \qquad \mathbf{I}_B = I_p\underline{/-180^\circ - \theta} = -I_p\underline{/-\theta} \qquad \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = 0$$

(ب) القدرات اللحظية المعطاه هى:

$$p_a(t) = v_a(t)i_a(t) = V_pI_p\cos\theta + V_pI_p\cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = v_b(t)i_b(t) = V_pI_p\cos\theta + V_pI_p\cos(2\omega t - \theta)$$

والقدرة اللحظية الكلية $P_T(t)$ هى :

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) = 2V_pI_p \cos\theta + 2V_pI_p \cos(2\omega t - \theta)$$

القدرة المتوسطة $P_{avg} = 2\, V_P I_P \cos\theta$

11.2 أعد حل المسألة 11-1 إذا كان $V_P = 110\ V_{rms}$ ، $Z = 4 + j\,3\Omega$

(أ) فى الصورة الاتجاهية $Z = 4 + j3 = 5\,\angle 36.9^\circ\ \Omega$ ومن ثم .

$$\mathbf{V}_{AN} = 110\angle 0\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{BN} = 110\angle -180^\circ\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 110\angle 0 - 110\angle -180^\circ = 220\angle 0\ \text{V}$$

and $\quad \mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/Z = 22\angle -36.9^\circ\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/Z = 22\angle -216.9^\circ = -22\angle -36.9^\circ\ \text{A}$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = 0$$

(ب)

$$p_a(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ)] = 1936 + 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \quad \text{(W)}$$

$$p_b(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ - 360^\circ)] = 1936 + 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \quad \text{(W)}$$

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) = 3872 + 4840\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \quad \text{(W)}$$

$$P_{avg} = 3872\ \text{W}$$

11.3 أعد حل المسألة 11-2 ولكن باعتبار جهدى المنبع فى المسألة 11-1 بينهما زاوية وجه 90° .

(أ) مرة أخرى $Z = 5\,\angle 36.9^\circ$ ومن ثم .

$$\mathbf{V}_{AN} = 110\angle 0\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{BN} = 110\angle -90^\circ\ \text{V}$$

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 110\angle 0 - 110\angle -90^\circ = 110(\sqrt{2}\angle -45^\circ) = 155.6\angle -45^\circ\ \text{V}$$

and $\quad \mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/\mathbf{Z} = 22\angle -36.9^\circ\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/\mathbf{Z} = 22\angle -126.9^\circ\ \text{A}$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = 22\angle -36.9^\circ + 22\angle -126.9^\circ = 22(\sqrt{2}\angle -81.9^\circ) = 31.1\angle -81.9^\circ\ \text{A}$$

(ب)

$$p_a(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ)] = 1936 + 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \quad \text{(W)}$$

$$p_b(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ - 180^\circ)] = 1936 - 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \quad \text{(W)}$$

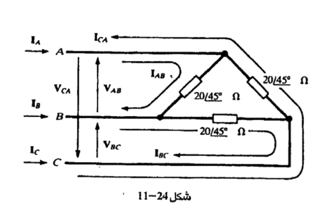
$$p(t) = P_a + P_b = 2(1936) = 3872\ \text{W}$$

$$P_{avg} = p(t) = 3872\ \text{W}$$

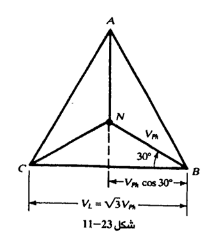
11.4 بين أن جهد الخط V_L فى نظام الثلاث أوجه هو $\sqrt{3}$ من جهد الوجه V_{ph} .

انظر مخطط المتجهات (للتعاقب ABC) شكل 11-23 .

11.5 نظام ثلاثى ABC ذو جهد فعال 70.7 V يحتوى على حمل ثلاثى متزن على شكل دلتا بالمعاوقات $20 \angle 45° \ \Omega$. أوجد تيارات الخط وارسم مخطط المتجهات للجهد والتيار .



شكل 11-24



شكل 11-23

الدائرة المبينة شكل 11-24 وجهود الوجه لها القيم $V_{max} = \sqrt{2}\ V_{eff} = 100$ V ويمكن الحصول على زوايا الوجه من شكل 11-7(a) وبذلك :

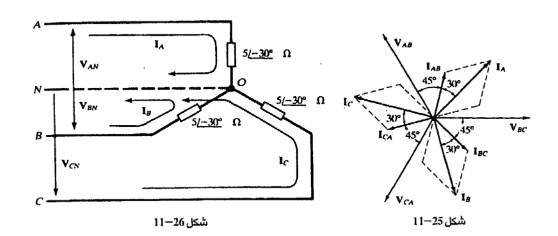
$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 120°}{20\angle 45°} = 5.0\angle 75° \quad \text{A}$$

وبالمثل $I_{BC} = 5.0 \angle -45°$ A و $I_{CA} = 5.0 \angle -45°$ A . وتكون تيارات الخط .

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 5\angle 75° - 5\angle 195° = 8.65\angle 45° \quad \text{A}$$

وبالمثل $I_B = 8.65$ L-75° A $I_C = 8.65$ L165° A .

ومخطط المتجهات للجهود والتيار مبين فى شكل 11-25 .



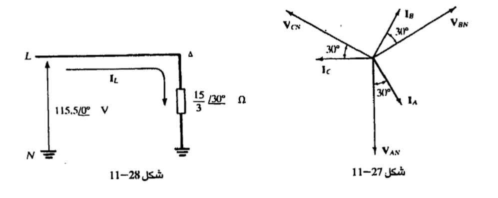
شكل 26—11 شكل 25—11

11.6 نظام ثلاثى متزن CBA الجهد الفعال للخط هو 106.1 V متصل به حمل ثلاثى متزن على شكل نجمة بالمعاوقات $5\,\underline{/-30^\circ}\ \Omega$ (شكل 26-11) . أوجد التيارات وارسم مخطط المتجهات للجهد والتيار.

مع حمل النجمة المتزنة يكون تيار التعادل صفراً ومع هذا فإنه من الأفضل عمل توصيلة التعادل ليسهل حساب تيارات الخط. ويكون تيار الخط $V_L = \sqrt{2}\,(106.1) = 150$ V وتكون القيمة من الخط لخط التعادل هى $V_{LN} = 150/\sqrt{3} = 86.6$ V

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{86.6\underline{/-90^\circ}}{5\underline{/-30^\circ}} = 17.32\underline{/-60^\circ}\quad A$$

وبالمثل $I_B = 17.32\,\underline{/60^\circ}$ A ، $I_C = 17.32\,\underline{/180^\circ}$ A . انظ شكل المتجهات شكل 11-27 والذى فيه يتقدم تيارات الخط المتزنة جهود الوجه بزاوية 30° (القيمة السالبة) وهى زاوية المعاوقات.



شكل 28—11 شكل 27—11

11.7 نظام ثلاثى CBA ذو ثلاثة أسلاك جهده الفعال 106.1 V به حمل ثلاثى متزن على شكل دلتا بالمعاوقات $Z = 15\ \underline{/30^\circ}\ \Omega$. أوجد تيارات الخط والوجه بطريقة الدائرة المكافئة ذات الوجه الواحد.

بالرجوع لشكل 28-11 $V_{LN} = (141.4\ \sqrt{2})\ 1\sqrt{3} = 115.5V$ وبذلك

$$\mathbf{I}_L = \frac{115.5\underline{/0^\circ}}{(15/3)\underline{/30^\circ}} = 23.1\underline{/-30^\circ} \quad \text{A}$$

تتأخر تيارات الخط جهود الوجه فى التعاقب ABC بالزاوية 30°.

$$\mathbf{I}_A = 23.1\underline{/60^\circ} \ \text{A} \qquad \mathbf{I}_B = 23.1\underline{/-60^\circ} \ \text{A} \qquad \mathbf{I}_C = 23.1\underline{/180^\circ} \ \text{A}$$

ويتأخر تيارات الوجه $I_{ph} = I_L / \sqrt{3} = 13.3$ A جهود الخط المناظرة لها بزاوية 30° .

$$\mathbf{I}_{AB} = 13.3\underline{/90^\circ} \ \text{A} \qquad \mathbf{I}_{BC} = 13.3\underline{/-30^\circ} \ \text{A} \qquad \mathbf{I}_{CA} = 13.3\underline{/210^\circ} \ \text{A}$$

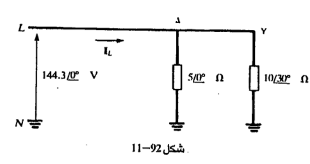
ورسم شكل المتجهات يحقق الزاويا السابقة.

11.8 نظام ثلاثى ذو ثلاثة أسلاك وجهد فعال 178.8 V يغذى حملين متزنين أحدهما على شكل دلتا بالمعاوقات $Z_\Delta = 15\ \underline{/0^\circ}\ \Omega$ والآخر على شكل نجمة بالمعاوقات $Z_Y = 10\ \underline{/30^\circ}\ \Omega$. أوجد القدرة الكلية.

حول أولاً حمل دلتا ليكون نجمة ثم استخدم الدائرة المكافئة للوجه الواحد كما فى شكل 29-11 للحصول على تيارات الخط.

$$\mathbf{I}_L = \frac{144.3\underline{/0^\circ}}{5\underline{/0^\circ}} + \frac{144.3\underline{/0^\circ}}{10\underline{/30^\circ}} = 42.0\underline{/-9.9^\circ} \quad \text{A}$$

Then $\qquad P = \sqrt{3}V_{Leff}I_{Leff}\cos\theta = \sqrt{3}(176.8)(29.7)\cos 9.9^\circ = 8959 \text{ W}$



شكل 92—11

11.9 أوجد القراءة باستخدام طريقة الواطمترين في الدائرة المبينة في المسألة 8-11 .

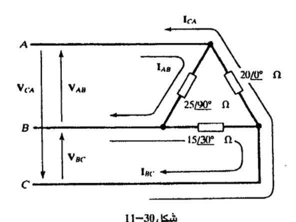
زاويـة التيـار I_L هي $-9.9°$ وهي سالب زاويـة المعاوقة المكافئـة لتوصيلة التوازى $5\ \angle 0°\ \Omega$ ، $10\ \angle 30°\ \Omega$ حيث $\theta = 9.9°$ من علاقات بند 13-11 .

$$W_1 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta + 30°) = (176.8)(29.7)\cos 39.9° = 4028\ \text{W}$$

$$W_2 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta - 30°) = (176.8)(29.7)\cos(-20.1°) = 4931\ \text{W}$$

وللتأكد من صحة النتائج $W_1 + W_2 = 8959\ \text{W}$ وهو ما يتفق مع ما حصلنا عليه في مسألة 8-11 .

11.10 منبع ثلاثي الوجه، جهد الخط الفعال 240 V به حمل ثلاثي دلتا غير متزن مبين شكل 30-11 . أوجد تيارات الخط والقدرة الكلية .



شكل 30-11

يمكن إجراء حسابات القدرة بدون معرفة تعاقب النظام والقيم الفعالة لتيارات الوجه هي :

$$I_{ABeff} = \frac{240}{25} = 9.6\ \text{A} \qquad I_{BCeff} = \frac{240}{15} = 16\ \text{A} \qquad I_{CAeff} = \frac{240}{20} = 12\ \text{A}$$

وبذلك تكون القدرة المركبة في الأوجه الثلاثة هي :

$$\mathbf{S}_{AB} = (9.6)^2(25\angle 90°) = 2304\angle 90° = 0 + j2304$$

$$\mathbf{S}_{BC} = (16)^2(15\angle 30°) = 3840\angle 30° = 3325 + j1920$$

$$\mathbf{S}_{CA} = (12)^2(20\angle 0°) = 2880\angle 0° = 2880 + j0$$

والقدرة الكلية المركبة هى مجموعها :

$$\mathbf{S}_T = 6205 + j4224$$

أى أن $P_T = 6205$ W ، $Q_T = 4224$ var (حثى) .

وللحصول على التيار فلا بد من فرض التعاقب وليكن ABC وبالتالى باستخدام شكل 11-7(a) فإن :

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{339.4\angle 120^\circ}{25\angle 90^\circ} = 13.6\angle 30^\circ \quad \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{339.4\angle 0^\circ}{15\angle 30^\circ} = 22.6\angle -30^\circ \quad \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{339.4\angle 240^\circ}{20\angle 0^\circ} = 17.0\angle 240^\circ \quad \text{A}$$

وللحصول على تيارا الخط بتطبيق KCL عند نقط التوصيل .

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 13.6\angle 30^\circ - 17.0\angle 240^\circ = 29.6\angle 46.7^\circ \quad \text{A}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BC} + \mathbf{I}_{BA} = 22.6\angle -30^\circ - 13.6\angle 30^\circ = 19.7\angle -66.7^\circ \quad \text{A}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 17.0\angle 240^\circ - 22.6\angle -30^\circ = 28.3\angle -173.1^\circ \quad \text{A}$$

11.11 أوجد قراءة الواطمترين الموضوعين فى الخطين A ، B للدائرة فى المسألة 11-10 (الخط C هو خط مقارنة الجهد لكلا الجهازين) .

$$W_A = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{ACeff}\mathbf{I}^*_{Aeff}) = \text{Re}\left[(240\angle 60^\circ)\left(\frac{29.6}{\sqrt{2}}\angle -46.7^\circ\right)\right]$$

$$= \text{Re}\,(5023\angle 13.3^\circ) = 4888 \text{ W}$$

$$W_B = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{BCeff}\mathbf{I}^*_{Beff}) = \text{Re}\left[(240\angle 0^\circ)\left(\frac{19.7}{\sqrt{2}}\angle 66.7^\circ\right)\right]$$

$$= \text{Re}\,(3343\angle 66.7^\circ) = 1322 \text{ W}$$

لاحظ أن $W_A + W_B = 6210$ W والذى يتفق مع قيمة P_T فى المسألة 11-10 .

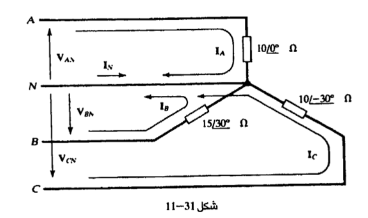
11.12 نظام ثلاثى ذو أربعة أسلاك ABC وجهد الخط $V_{BC} = 294.2\angle 0^\circ$ متصل به حمل ثلاثى على شكل نجمة $Z_A = 10\angle 0^\circ\ \Omega$ ، $Z_B = 10\angle 30^\circ\ \Omega$ ، $Z_C = 10\angle -30^\circ\ \Omega$ (شكل 11-31) . أوجد تيارات الخط والتعادل .

$$I_A = \frac{169.9\angle 90^\circ}{10\angle 0^\circ} = 16.99\angle 90^\circ \quad A$$

$$I_B = \frac{169.9\angle -30^\circ}{15\angle 30^\circ} = 11.33\angle -60^\circ \quad A$$

$$I_C = \frac{169.9\angle -150^\circ}{10\angle -30^\circ} = 16.99\angle -120^\circ \quad A$$

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 8.04\angle 69.5^\circ \quad A$$



شكل 31–11

11.13 حمل نجمة الثلاثى $Z_A = 10\ \angle 0^\circ\ \Omega$ ، $Z_B = 15\ \angle 30^\circ\ \Omega$ ، $Z_C = 10\ \angle -30^\circ\ \Omega$ كما فى شكل 32-11 يغذى بنظام ثلاثى الأوجه ثلاث أسلاك ABC والذى فيه $V_{BC} = 208\ \angle 0^\circ$ V .
أوجد الجهود على المعاوقات وإزاحة جهد التعادل V_{ON} .

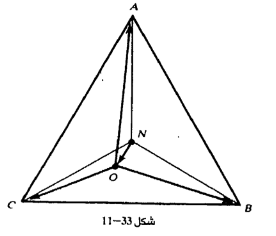
يمكن استخدام طريقة مثال 7-11 هنا حيث تحل معادلة جهد عقدة واحدة وأيضاً يمكن الحل بطريقة أخرى باستخدام تيارات الشبيكة I_1 ، I_2 كما فى شكل 32-11 .

$$\begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ + 15\angle 30^\circ & -15\angle 30^\circ \\ -15\angle 30^\circ & 15\angle 30^\circ + 10\angle -30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\angle 120^\circ \\ 208\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

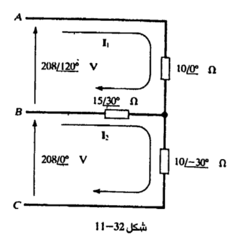
وبالحل : $I_1 = 14.16\ \angle 86.09^\circ$ A ، $I_2 = 10.21\ \angle 52.41^\circ$ A وتكون تيارات الخطوط .

$$I_A = I_1 = 14.16\angle 86.09^\circ \quad A \qquad I_B = I_2 - I_1 = 8.01\angle -48.93^\circ \quad A \qquad I_C = -I_2 = 10.21\angle -127.59^\circ \quad A$$

والآن يمكن حساب متجهات الجهد عند الحمل .



شكل 33–11



شكل 32–11

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{I}_A\mathbf{Z}_A = 141.6\underline{/86.09^\circ} \quad \text{V}$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{I}_B\mathbf{Z}_B = 120.2\underline{/-18.93^\circ} \quad \text{V}$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{I}_C\mathbf{Z}_C = 102.1\underline{/-157.59^\circ} \quad \text{V}$$

$$\mathbf{V}_{ON} = \mathbf{V}_{OA} + \mathbf{V}_{AN} = 141.6\underline{/-93.91^\circ} + 120.1\underline{/90^\circ} = 23.3\underline{/-114.53^\circ} \quad \text{V}$$

ومخطط المتجهات مبين فى شكل 33-11 .

11.14 أوجد القدرة الكلية المتوسطة لحمل نجمة الغير متزن فى المسألة 13-11 وقارن بقراءتى الواتمتران فى الخطين B ، C.

قدرات الوجه هى :

$$P_A = I^2_{Aeff}R_A = \left(\frac{14.16}{\sqrt{2}}\right)(10) = 1002.5 \text{ W}$$

$$P_B = I^2_{Beff}R_B = \left(\frac{8.01}{\sqrt{2}}\right)(15 \cos 30^\circ) = 417.0 \text{ W}$$

$$P_C = I^2_{Ceff}R_C = \left(\frac{10.21}{\sqrt{2}}\right)^2(10 \cos 30^\circ) = 451.4 \text{ W}$$

وبالتالى فإن القدرة الكلية المتوسطة هى 1870.9 W .

من نتائج المسألة 13-11 فإن قراءتى الواتمتران هى :

$$W_B = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{BAeff}\mathbf{I}^*_{Beff}) = \text{Re}\left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}}\underline{/-60^\circ}\right)\left(\frac{8.01}{\sqrt{2}}\underline{/48.93^\circ}\right)\right] = 817.1 \text{ W}$$

$$W_C = \text{Re}\,(\mathbf{V}_{CAeff}\mathbf{I}^*_{Ceff}) = \text{Re}\left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}}\underline{/2400^\circ}\right)\left(\frac{10.21}{\sqrt{2}}\underline{/127.59^\circ}\right)\right] = 1052.8 \text{ W}$$

والقدرة الكلية المقروءة بالواتمتران هى 1869.9 W .

11.15 حمل ثلاثى متزن على شكل دلتا يقرأ جهاز الواتمتران له 1154 W ، 577 W . أوجد معاوقة الحمل إذا كان جهد الخط 141.4 V .

$$\pm\tan\theta = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{577}{1731}\right) = 0.577 \qquad \theta = \pm 30.0^\circ$$

ومن العلاقة $P_T = \sqrt{3}\, V_{Leff} I_{Leff} \cos\theta$.

$$Z_\Delta = \frac{V_{Leff}}{I_{Pheff}} = \frac{\sqrt{3}V_{Leff}}{I_{Leff}} = \frac{3V^2_{Leff}\cos\theta}{P_T} = \frac{3(100)^2\cos 30.0^\circ}{1154 + 577}\,\Omega = 15.0\,\Omega$$

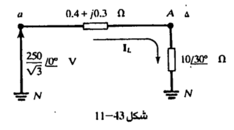
ولذلك $Z_\Delta = 15.0\angle\pm 30^\circ\ \Omega$.

11.16 حمل ثلاثى Δ متزن به $Z_\Delta = 30\angle 30^\circ\ \Omega$ متصل بنظام ثلاثى الأوجه ثلاث أسلاك 250 V بموصلات لها المعاوقات $Z = 0.4 + j\,0.3\ \Omega$. أوجد جهد الخط عند الحمل .

الدائرة المكافئة للوجه الواحد مبينة شكل 34-11 . وبتقسيم الجهد فإنه بالتعويض يكون الجهد للحمل Y كما يلى :

$$\mathbf{V}_{AN} = \left(\frac{10\angle 30^\circ}{0.4 + j0.3 + 10\angle 30^\circ}\right)\left(\frac{250}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ\right) = 137.4\angle -0.33^\circ \quad \text{V}$$

whence $V_L = (137.4)(\sqrt{3}) = 238.0$ V.



شكل 43-11

وباعتبار القيم فقط فإن جهد الخط 2380 V عند الحمل يمثل خفضاً فى الجهد 12.0 V . وتحدد قيمة المقاومة فى Z_C كل من مقطع السلك وطوله بينما يؤثر فى الممانعة الحثية نوع مادة السلك (صلب - المنيوم - فبر . . .) وأيضاً الطول .

مسائل إضافية

الإجابات المعطاه للمسائل الآتية لم تشتمل على المخطط الإتجاهي للجهد والتيار. ومع ذلك فقد يطلب ذلك في المسائل، وعموماً فإن شكل المتجهات يجب رسمه لكل مسألة متعددة الأوجه.

11.17 ثلاث معاوقات $10.0 \angle 53.13^\circ\ \Omega$ متصلة على شكل دلتا إلى منبع ABC جهده $V_{BC} = 495.0 \angle 0^\circ\ V$. أوجد تيارات الخط.

الجواب: $I_A = 58.8\angle -143.13^\circ\ A,\ I_B = 58.8\angle -23.13^\circ\ A,\ I_C = 58.8\angle 96.87^\circ\ A$

11.18 ثلاث معاوقات بقيم $42.0 \angle -35^\circ\ \Omega$ متصلة على شكل دلتا إلى منبع ثلاثي ABC جهده $V_{BC} = 495.0 \angle 0^\circ\ V$. أوجد تيارات الخط.

الجواب: $I_A = 20.41\angle 125^\circ\ A,\ I_B = 20.41\angle 5^\circ\ A,\ I_C = 20.41\angle -115^\circ\ A$

11.19 نظام ثلاثي أوجه ثلاث أسلاك بجهد خط فعال 100 V له التيارات.

$I_A = 15.41\angle -160^\circ\ A \qquad I_B = 15.41\angle -40^\circ\ A \qquad I_C = 15.41\angle 80^\circ\ A$

ما هو تعاقب النظام وما هي المعاوقات إذا كانت متصلة على شكل دلتا؟

الجواب: $CBA,\ 15.9 \angle 70^\circ\ \Omega$.

11.20 حمل Y متزن له المعاوقات $6.0 \angle 45^\circ\ \Omega$ متصل بنظام ثلاثي CBA جهد الخط الفعال 208 V. أوجد تيار الأربع خطوط.

الجواب: $I_A = 28.31\angle -135^\circ\ A,\ I_B = 28.31\angle -15^\circ\ A,\ I_C = 28.31\angle 105^\circ\ A,\ I_N = 0$

11.21 حمل Y متزن له المعاوقات $65.0 \angle 20^\circ\ \Omega$ متصل بنظام ثلاثي CBA ثلاث أسلاك حيث $V_{AB} = 678.8 \angle -120^\circ\ \Omega$. أوجد تيارات الخط الثلاثة.

الجواب: $I_A = 6.03\angle -70^\circ\ A,\ I_B = 6.03\angle 50^\circ\ A,\ I_C = 6.03\angle 170^\circ\ A$

11.22 حمل Δ متزن به $Z_\Delta = 9.0 \angle -30^\circ\ \Omega$ وحمل Y متزن به $Z_Y = 5.0 \angle 45^\circ\ \Omega$ تغذى بنفس النظام الثلاثي ABC ذو جهد خط فعال 480 V. أوجد تيارات الخط باستخدام طريقة دائرة الوجه الواحد المكافئة.

الجواب : $I_A = 168.9\angle 93.36^\circ$ A, $I_B = 168.9\angle -26.64^\circ$ A, $I_C = 168.9\angle -146.64^\circ$ A

11.23 حمل Δ متزن له المعاوقات $27.0 \angle -25^\circ\ \Omega$ وحمل Y تزن له المعاوقات $10.0 \angle 30^\circ\ \Omega$ تغذى بنفس النظام الثلاثى ABC حيث الجهد $V_{CN} = 169.8 \angle -150^\circ$ V أوجد تيارات الخط .

الجواب : $I_A = 35.8\angle 117.36^\circ$ A, $I_B = 35.8\angle -2.64^\circ$ A, $I_C = 35.8\angle -122.64^\circ$ A

11.24 حمل متزن Δ له المعاوقات $10.0 \angle -36.9^\circ\ \Omega$ وحمل Yمتزن تتغذى بنفس النظام الثلاثى ABC حيث $V_{CA} = 141.4 \angle 240^\circ$ V . فإذا كان $I_B = 40.44 \angle 13.41^\circ$ A فما هى معاوقات الحمل المتصل على شكل Y . الجواب : $5.0 \angle -53.3^\circ$.

11.25 نظام ثلاثى ABC جهد الخط الفعال 500 V له حمل متصل Δ كالتالى :

$Z_{AB} = 10.0\angle 30^\circ\ \Omega \qquad Z_{BC} = 25.0\angle 0^\circ\ \Omega \qquad Z_{CA} = 20.0\angle -30^\circ\ \Omega$

أوجد تيارات الخط .

الجواب : $I_A = 106.1\angle 90.0^\circ$ A, $I_B = 76.15\angle -68.20^\circ$ A, $I_C = 45.28\angle -128.65^\circ$ A

11.26 نظام ثلاثى ABC به $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ$ V له الحمل Δ التالى :

$Z_{AB} = 5.0\angle 0^\circ\ \Omega \qquad Z_{BC} = 4.0\angle 30^\circ\ \Omega \qquad Z_{CA} = 6.0\angle -15^\circ\ \Omega$

أوجد تيارات الخط .

الجواب : $I_A = 99.7\angle 99.7^\circ$ A, $I_B = 127.9\angle -43.3$ A, $I_C = 77.1\angle -172.1^\circ$ A

11.27 نظام ثلاثى ABC ذو أربعة أسلاك جهد الخط الفعال 100 V له معاوقات Y التالية :

$Z_A = 3.0\angle 0^\circ\ \Omega \qquad Z_B = 3.61\angle 56.31^\circ\ \Omega \qquad Z_C = 2.24\angle -26.57^\circ\ \Omega$

أوجد التيارات I_A ، I_B ، I_C ، I_N .

الجواب : $27.2\angle -90^\circ$ A, $22.6\angle -26.3^\circ$ A, $36.4\angle 176.6^\circ$ A, $38.6\angle 65.3^\circ$ A

11.28 نظام ثلاثى ABC أربعة أسلاك به $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ$ V له معاوقات Y التالية :

$Z_A = 12.0\angle 45^\circ\ \Omega \qquad Z_B = 10.0\angle 30^\circ\ \Omega \qquad Z_C = 8.0\angle 0^\circ\ \Omega$

أوجد التيارات I_A ، I_B ، I_C ، I_N .

الجواب : $14.16\angle 45^\circ$ A, $16.99\angle -60^\circ$ A, $21.24\angle -150^\circ$ A, $15.32\angle 90.4^\circ$ A

11.29 حمل متصل به $Z_A = 10\angle 0^\circ\ \Omega$ ، $Z_B = 10\angle 60^\circ\ \Omega$ ، $Z_C = 10\angle -60^\circ\ \Omega$ متصل بنظام ثلاثى ABC به الجهد الفعال للخط 141.4 V . أوجد جهد الحمل V_{AO} ، V_{BO} ، V_{CO} وجهد الإزاحة لنقطة التعادل V_{ON} . أنشئ مخطط متجهات يشابه لشكل 18-11 .

الجواب : $173.2\angle 90^\circ$ V, $100\angle 0^\circ$ V, $100\angle 180^\circ$ V, $57.73\angle -90^\circ$ V

11.30 حمل Y به $Z_A = 10\angle -60^\circ\ \Omega$ ، $Z_B = 10\angle 0^\circ\ \Omega$ ، $Z_C = 10\angle 60^\circ\ \Omega$ متصل بنظام ثلاثى ABC به الجهد الفعال للخط 147.1 V . أوجد تيارات الخط I_A ، I_B ، I_C .

الجواب : $0.20\angle 120^\circ$ A ، $20.8\angle -60^\circ$ A .

11.31 نظام ثلاثى أسلاك ABC متصل به حملاً متزناً له جهد خط 200 V وتيار خط (قيمة عظمى) $I_A = 13.61\angle 60^\circ$ A . أوجد القدرة الكلية .

الجواب : 2887 W .

11.32 حملان متزنان Δ بالمعاوقات $20\angle -60^\circ\ \Omega$ ، $18\angle 45^\circ\ \Omega$ على الترتيب متصل لنظام ثلاثى الأوجه الذى به جهد خط $V_{BC} = 212.1\angle 0^\circ$ V . أوجد قدرة الوجه لكل حمل بعد استخدام طريقة الخط الواحد المكافئة للحصول على تيار الخط الكلى . احسب القدرة الكلية . وقارن مع مجموعة قدرات الثلاثة أوجه .

الجواب : 562.3 W, 883.6 W, 4337.5 W = 3(562.3 W) + 3(883.6 W)

11.33 فى المسألة 11.5 تنتج عن توصيل الحمل Δ المتزن $Z = 20\angle 45^\circ$ تيار الخط 8.65 A لجهد خط 100 V وكلاهما قيم عظمى . أوجد قراءة الواطمترين المستخدمين لقياس القدرة الكلية .

الجواب : 417.7 W , 111.9 W .

11.34 أوجد قراءة الواطمترين فى النظام ثلاثى الأوجه ذو الثلاث أسلاك ، جهد خط 240 V وبه حمل متزن Δ $20\angle 80^\circ\ \Omega$. الجواب : 3206 W , 1706 W- .

11.35 نظام ثلاثى أوجه ABCبه جهد خط $V_{BC} = 311.1 \angle 0° \text{ V}$. له تيارات خط .

$I_A = 61.5\angle 116.6° \text{ A}$ $\quad I_B = 61.2\angle -48.0° \text{ A}$ $\quad I_C = 16.1\angle 218° \text{ A}$

أوجد قراءة الواتمترين فى الخطوط (أ) A ، B . (ب) B ، C . (جـ) A ، C .

الجواب : (*a*) 5266 W, 6370 W; (*b*) 9312 W, 2322 W; (*c*) 9549 W, 1973 W

11.36 نظام ثلاثى أوجه ثلاث أسلاك ABC له جهد خط فعال 440 V وتيارات الخط

$I_A = 27.9\angle 90° \text{ A}$ $\quad I_B = 81.0\angle -9.9° \text{ A}$ $\quad I_C = 81.0\angle 189.9° \text{ A}$

أوجد قراءتى الواطمترين فى الخطوط (أ) A ، B . (ب) B ، C .

الجواب : (*a*) 7.52 kW, 24.8 kW; (*b*) 16.16 kW, 16.16 kW

11.37 اتصل واتمتران فى نظام ثلاثى أسلاك له جهد فعال 120 V ويقرأن 1500 W ، 500 W . فما هو قيمة معاوقة الحمل Δ المتزن؟

الجواب : $16.3\angle \pm 40.9° \ \Omega$

11.38 نظام ثلاث أوجـه ثلاث أسـلاك ABC جهـده الفعـال 173.2 V وكانت قـراءة الواطمتـرين المتصلان بالخط A ، B هى 301 W- ، 1327 W . أوجد معاوقة الحمل Y المتزن . حيث أنه قد تحد التعاقب فإن إشارة زاوية المعاوقة يمكن تحديدها) . الجواب : $10\angle -70° \ \Omega$

11.39 نظام ثلاث أوجه ثلاث أسلاك جهد الخط $V_{BC} = 339.4 \angle 0° \text{ V}$ به حمل متزن Y بالقيمة $Z_Y = 15 \angle 60° \ \Omega$. وكانت المعاوقة بين خط النظام والحمل $2.24 \angle 26.57 \ \Omega$. أوجد جهد الخط عند الحمل . الجواب : 301.1 V .

11.40 أعد حل المسألة 11.39 مع حمل معاوقة $Z_Y = 15 \angle -60° \ \Omega$. برسم متجهات الجهد والتيار للحالتين بين تأثير زاوية معاوقة الحمل على الفقد فى الجهد بالنسبة لمعاوقة خط معروفة . الجواب : 332.9 V .

الفصل الثانى عشر

الإستجابة الترددية والمرشحات والرنين

12.1 الاستجابة الترددية

استجابة الدوائر الخطية للدخل الجيبى يكون أيضاً جيبياً وبنفس التردد ولكن ربما بقيمة عظمى وزاوية وجه مختلفة . وهذه الاستجابة يكون دالة فى التردد . وقد علمنا مؤخراً أن التغير الجيبى يمكن تمثيله بمتجه ذو قيمة وزاوية . وتعرف الاستجابة الترددية بنسبة متجه الخرج إلى متجه الدخل . وهى دالة حقيقية فى $j\omega$ وتعطى بالعلاقة :

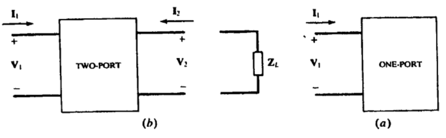
$$\mathbf{H}(j\omega) = \text{Re}\,[\mathbf{H}] + j\,\text{Im}\,[\mathbf{H}] = |\mathbf{H}|e^{j\theta} \qquad (1a)$$

حيث $\text{Re}[\mathbf{H}]$ ، $\text{Im}[\mathbf{H}]$ هى الأجزاء الحقيقية والتخيلية للقيمة $\mathbf{H}(j\omega)$ وكلاً من $|\mathbf{H}|$ ، θ هى القيمة وزاوية الوجه . $\text{Re}|\mathbf{H}|$ ، $\text{Im}|\mathbf{H}|$ ، $\mathbf{H}$ ، θ هى عموماً دالة فى ω وترتبط ببعضها بالعلاقتين التاليين :

$$|\mathbf{H}|^2 = |\mathbf{H}(j\omega)|^2 = \text{Re}^2\,[\mathbf{H}] + \text{Im}^2\,[\mathbf{H}] \qquad (1b)$$

$$\theta = \underline{/\mathbf{H}(j\omega)} = \tan^{-1}\frac{\text{Im}\,[\mathbf{H}]}{\text{Re}\,[\mathbf{H}]} \qquad (1c)$$

ويعتمد تجاوب التردد إذن على اختيار كلاً من متغير الدخل والخرج فمثلاً إذا وصل منبع جهد على طرفى الشبكة شكل 12-1(a) فإن تيار المنبع يمثل الدخل وجهد المنبع يمثل الخرج . وفى هذه الحالة فإن معاوقة الدخل $Z = V_1/I_1$ تمثل تجاوب التردد . وبالعكس إذا استخدم منبع جهد للدخل وتم قياس تيار الأطراف فإن مسامحة الدخل $Y = I_1/V_1 = 1/Z_1$ تمثل تجاوب التردد .



شكل 1—12

وللشبكة ذات المدخلين شكل 12-1(b) فإن تجاوبات التردد تعرف كما يلى :

معاوقة الدخل $Z_{in} = (j\omega) = V_1/Z_1$

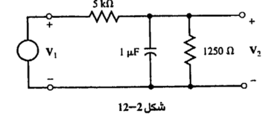
مسامحة الدخل $Y_{in} = (j\omega) = V_1/Z_{in}\ (j\omega) = Z_1/V_1$

نسبة جهد الانتقال $H_{\upsilon} = (j\omega) = V_2/V_1$

نسبة تيـار الانتقال $H_i = (j\omega) = I_2/I_1$

معاوقــة الانتقال V_1/I_2 ، V_2/I_1

مثـــال 12.1 : أوجد تجاوب التردد V_2/I_1 للدائرة ذات المدخلين فى شكل 12-2 .



شكل 2—12

ضع Y_{RC} لتكون المسامحة لمجموعة دائرة التوازى RC . وبالتالى $Y_{RC} = 10^{-6}\ j\omega + 1\ /\ 1250$ ، ونحصل على V_2/V_1 بتقسيم V_1 بين Z_{RC} ، المقاومة $5\ k\Omega$.

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + 5000} = \frac{1}{1 + 5000Y_{RC}} = \frac{1}{5(1 + 10^{-3}j\omega)} \qquad (2a)$$

$$|H| = \frac{1}{5\sqrt{1 + 10^{-6}\omega^2}} \qquad \theta = -\tan^{-1}(10^{-3}\omega) \qquad (2b)$$

حل آخر : نحصل أولاً على مكافئ ثفنين لجزء المقاومة للدائرة $V_{Th} = V_1/5$ ، $R_{Th} = 1\ k\Omega$ ثم نقسم V_{Th} بين R_{Th} والمكثف $1\ \mu F$ لنحصل على (2a) .

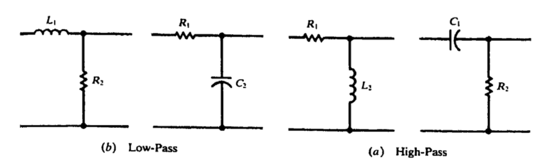
12.2 الشبكات ذات الإمرار العالى وذات الإمرار المنخفض

شكل 3-12 يبين مقسم جهد من المقاومات فى حالة عدم الحمل مع البيان المعتاد للاتجاهين للجهد والتيار . وبذلك يكون دالة تحويل الجهد ومعاوقة الدخل كالتالى :

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \mathbf{H}_{z\infty}(\omega) = R_1 + R_2$$

شكل 3-12

والعلامة ∞ تدل على حالة عدم الحمل . وكلا $H_{v\infty}$ ، $H_{Z\infty}$ هى ثوابت حقيقية لا تتوقف على التردد حيث أنه لا يوجد عناصر للممانعة . وإذا احتوت الشبكة على ملف أو مكثف فإن كلاً من $H_{v\infty}$ ، $H_{Z\infty}$ سيكون مركباً وسيتغير مع التردد . وإذا تناقص $|H_{v\infty}|$ كلما زاد التردد فإن الأداء يسمى توقف أداء التردد العالى وتكون الدائرة شبكة إمرار منخفض . وبالعكس فإن الشبكة ذات الإمرار العالى سيكون لها أداء تردد منخفض مع تناقص $|H_{v\infty}|$ كلما تناقص التردد . شكل 4-12 يبين أربعة دوائر ذات العنصرين . اثنين للإمرار العالى واثنين للإمرار المنخفض .



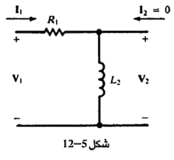
شكل 12-4

تكون دائرة الإمرار العالى RL المبينة شكل 12-5 دائرة مفتوحة أو فى حالة عدم الحمل . وتكون استجابة تردد معاوقة الدخل محدداً برسم القيمة وزاوية الوجه للعلاقة .

$$\mathbf{H}_{z\infty}(\omega) = R_1 + j\omega L_2 \equiv |\mathbf{H}_z| \underline{/\theta_{\mathbf{H}}}$$

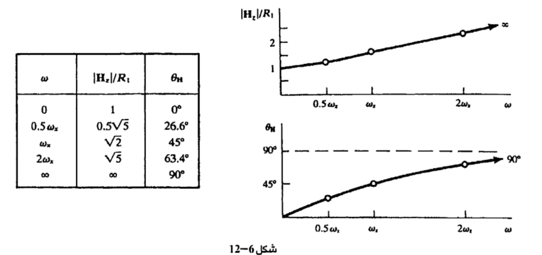
وبالقسمة على R_1 وبكتابة $W_x = R_1/L_2$ تكون الصورة العامة .

$$\frac{\mathbf{H}_{z\infty}(\omega)}{R_1} = 1 + j(\omega/\omega_x) = \sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}\, \underline{/\tan^{-1}(\omega/\omega_x)}$$



شكل 12-5

وتكون خمس قيم للمقدار ω هى المعلومات الكافية لرسم $|H_2|/R_1$ ، θ_H كما هو مبين شكل 12-6 . وتقترب القيمة من ما لا نهاية كلما زاد التردد وبالتالى فإنه عند الترددات العالية يكون تيار الشبكة I_1 صفراً .



ω	$\lvert \mathbf{H}_z \rvert / R_1$	θ_H
0	1	0°
$0.5\omega_x$	$0.5\sqrt{5}$	26.6°
ω_x	$\sqrt{2}$	45°
$2\omega_x$	$\sqrt{5}$	63.4°
∞	∞	90°

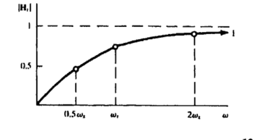
شكل 12-6

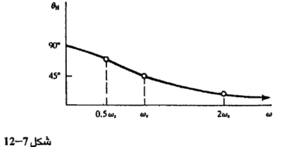
وبطريقة مشابهة يمكن الحصول على استجابة التردد لنسبة جهدى الخرج والدخل . وبتقسيم لجهد فى حالة عدم الحمل نصل إلى :

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} = \frac{1}{1 - j(\omega_x/\omega)}$$

ومن ثم $$|\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}} \qquad \text{and} \qquad \theta_H = \tan^{-1}(\omega_x/\omega)$$

ورسمت القيمة والزاوية فى شكل 7-12 . وتقترب دالة التحويل هذه من الوحدة عند التردد ـالى حيث يكون جهدا الخرج هو نفسه جهد الدخل ومن هنا نشأت التسمية «توقف أداء التردد نخفض» والتعريف «إمرار عالى» .



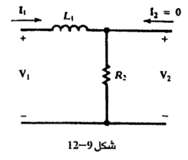


شكل 12-7

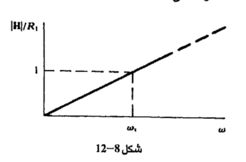
وتكون معاوقة الانتقال لدائرة الإمرار العالى RL فى حالة عدم الحمل هى :

$$\mathbf{H}_{\infty}(\omega) = \frac{V_2}{I_1} = j\omega L_2 \qquad \text{or} \qquad \frac{\mathbf{H}_{\infty}(\omega)}{R_1} = j\,\frac{\omega}{\omega_x}$$

والزاوية ثابتة عند °90 ويكون شكل تغير القية مع ω خطا مستقيما مشابها لرسم ωL مع ω فى الممانعة . انظر شكل 8-12 .



شكل 9—12



شكل 8—12

وبتبادل أماكن R ، L ينتج عنه شبكة إمرار منخفض مع إيقاف عند التردد العالى (شكل 9-12) وفى حالة الدائرة المفتوحة .

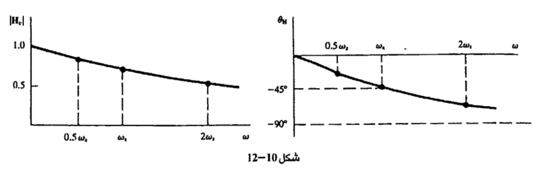
$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_1} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)}$$

مع $\omega_x = R_2/L_1$ أى أنه :

$$|\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}} \qquad \text{and} \qquad \theta_{\mathbf{H}} = \tan^{-1}(-\omega/\omega_x)$$

ورسم كلاً من القيمة والزاوية مبين شكل 10-12 . وتقترب دالة تحويل الجهد H_{v_∞} من الصفر عند الترددات العالية ومن الوحدة عند 0 = ω وبالتالى تسمى إمرار منخفض .

وسنحصل على دوال أخرى للشبكة ذات الإمرار المنخفض فى المسائل المحلولة .



شكل 10—12

مثـــال 12-2 : أوجد دالة جهد التحويل $H_{\upsilon\infty}$ للدائرة المفتوحة المبينة شكل 12-11 . عند أي تردد (Hz) تكون $|H_\upsilon| = 1/\sqrt{2}$ إذا كان (أ) $C_2 = 10$ nF ، (ب) $C_2 = 1$ nF .

I_1 $R_1 = 5$ kΩ $I_2 = 0$ + V_1 C_2 V_2 − −

شكل 12—11

$$H_{\upsilon\infty}(\omega) = \frac{1/j\omega C_2}{R_1 + (1/j\omega C_2)} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)} \qquad \text{where} \qquad \omega_x \equiv \frac{1}{R_1 C_2} = \frac{2 \times 10^{-4}}{C_2} \quad \text{(rad/s)}$$

(*a*)
$$|H_\upsilon| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}}$$

and so $|H_\upsilon| = 1/\sqrt{2}$ when

$$\omega = \omega_x = \frac{2 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

or when $f = (2 \times 10^4)/2\pi = 3.18$ kHz.

(*b*)
$$f = \frac{10}{1}(3.18) = 31.8 \text{ kHz}$$

وبمقارنة (أ) مع (ب) يبدو لا أنه كلما كانت قيمة C_2 أكبر كلما كان التردد أصغر الذى عنده $|H_\upsilon|$ ينخفض إلى 0.707 من قيمته العظمى 1 أى أن معظم رسم $|H_\upsilon|$ المبين بشكل 12-10 يزاح إلى اليسار . وبالتالى فاى مكثف تقديرى على التوازى مع C_2 يؤدى إلى خفض استجابة الدائرة .

12.3 ترددات نصف القدرة

التردد ω_x المحسوبة فى مثال 12-2 تكون عند

$$|H_\upsilon| = 0.707|H_\upsilon|_{max}$$

وتسمى تردد نصف القدرة . وفى هذه الحالة يكون الاسم مبررا فى المسألة 5-12 الذى يبين أن قدرة الدخل للدائرة شكل 11-12 ستكون نصف القيمة العظمى عندما .

$$\left|\frac{1}{j\omega C_2}\right| = R_1$$

أى عندما تكون $\omega = \omega_x$

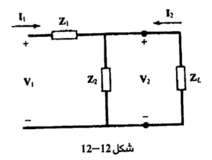
وعموماً فإنه بالنسبة للشبكات ذات العناصر الغير ثابتة ذات الدالة $H_{(\omega)}$ ستصل إلى قيمتها العظمى المطلقة عند تردد واحد معين ω_x وسنطلق على التردد الذى عنده

$$|\mathbf{H}(\omega)| = 0.707|\mathbf{H}(\omega_x)|$$

بتردد نصف القدرة (أو نقطة نصف القدرة) سواء كانت القيمة الفعلية للتردد مساوية أو غير مساوية 50% من القدرة . وفى معظم الحالات $0 < \omega_x < \infty$ وبالتالى فإه يوجد ترددين لنصف القدرة أحدهما بعد القيمة العظمى للتردد والآخر بعدها . وهى تسمى تردد (نقط) نصف القدرة العلوى والسفلى والمسافة بينهما هى عرض النطاق الذى يساعد فى قياس حدة القيمة العظمى .

12.4 الشبكات العامة ذات المدخلين والعنصرين

الشبكة الأساسية التى تحتوى على RL أو RC من النوع الذى درس فى بند 2-12 يمكن تعميمها بالمعاوقتين Z_1 و Z_2 كما هو مبين شكل 12-12 وتتصل معاوقة الحمل Z_L على طرفى الخرج .



شكل 12—12

بتقسيم الجهد .

$$V_2 = \frac{Z'}{Z_1 + Z'} V_1 \qquad \text{or} \qquad H_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z'}{Z_1 + Z'}$$

حيث $Z' = Z_2 Z_L / (Z_2 + Z_L)$ وهى المعاوقة المكافئة للمعاوقتين Z_2 ، Z_L على التوازى.
وتحسب بالمثل دوال التحويل الأخرى وهى مبينة فى جدول 12-1 .

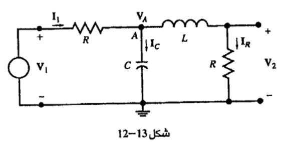
جدول 12-1

Output Condition \ Network Function	$H_z = \frac{V_1}{I_1}$ (Ω)	$H_v = \frac{V_2}{V_1}$	$H_i = \frac{I_2}{I_1}$	$H_v H_z = \frac{V_2}{I_1}$ (Ω)	$\frac{H_i}{H_z} = \frac{I_2}{V_1}$ (S)
Short-circuit, $Z_L = 0$	Z_1	0	-1	0	$-\frac{1}{Z_1}$
Open-circuit, $Z_L = \infty$	$Z_1 + Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$	0	Z_2	0
Load, Z_L	$Z_1 + Z'$	$\frac{Z'}{Z_1 + Z'}$	$\frac{-Z_2}{Z_2 + Z_L}$	Z'	$\frac{-Z'}{Z_L(Z_1 + Z')}$

12.5 الاستجابة الترددية ودوال الشبكة

يمكن الحصول على تجاوب التردد للشبكة بتعويض $j\omega$ بدلاً من s فى دالة الشبكة وهذه الطريقة المفيدة مبينة فى المثال التالى :

مثـــال 12.3 : أوجد (أ) دالة الشبكة $H(s) = V_2/V_1$ فى الدائرة المبينة شكل 12-13 . (ب) $H(j\omega)$ لقيم $LC = 2/\omega_0^2$ ، $L/C = R^2$. (جـ) القيمة وزاوية الوجه للقيمة $H(j\omega)$ فى (ب) لقيمة $\omega_0 = 1$ rad/s .



شكل 13-12

(أ) بفرض أن V_2 معروفة استخدم المعاوقات العامة Ls ، 1/Cs وحل قيم V_1 .

من $I_R = V_2 / R$.

$$V_A = (R + Ls)I_R = \frac{R + Ls}{R} V_2 \qquad (3)$$

$$I_C = CsV_A = \frac{Cs(R + Ls)}{R} V_2 \qquad \text{and} \qquad I_1 = I_R + I_C = \frac{V_2}{R} + \frac{Cs(R + Ls)}{R} V_2 = \frac{1 + Cs(R + Ls)}{R} V_2$$

Then,
$$V_1 = V_A + RI_1 = \frac{R + Ls}{R} V_2 + [1 + Cs(R + Ls)]V_2$$

and
$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2 + (L/R + CR)s + LCs^2} \qquad (4a)$$

(ب) من $LC = 2/\omega_0^2$ ، $L/C = R^2$ نحصل على $L = \sqrt{2}R/\omega_0$ ، $C = \sqrt{2}/R\omega_0$ وبالتعويض فى L ، C فى المعادلة (4a) نحصل على:

$$H(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}\right) \qquad \text{or} \qquad H(j\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2}\right) \qquad (4b)$$

$$|H|^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^4}\right) \qquad \text{and} \qquad \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

لاحظ أن $H(j\omega)$ لا تتوقف على R وتمرر الشبكة القيم الجيبية ذات التردد المنخفض وتمنع أو تضعف القيم الجيبية ذات التردد العالى . ويكون بذلك مرشح إمرار منخفض بتردد نصف القدرة بالقيمة $\omega = \omega_0$ وفى هذه الحالة تكون قيمة تجاوب التردد هو $|H(j\omega)| = |H(0)| \sqrt{2}/4$ وزاوية الوجه $\angle H(j\omega_0) = -\pi/2$.

(جـ) لقيم $\omega_0 = 1$.

$$H(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}\right) \qquad \text{or} \qquad H(j\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}\omega - \omega^2}\right) \qquad (4c)$$

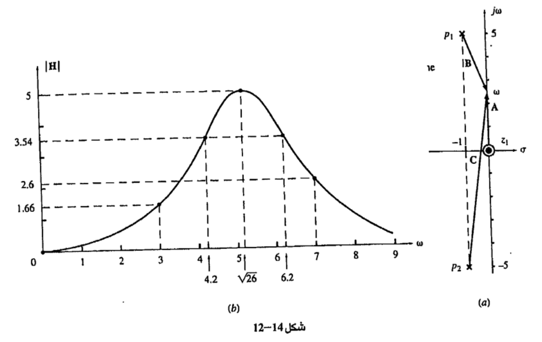
$$|H|^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{1 + \omega^4} \qquad \text{and} \qquad \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \omega^2}\right)$$

شبكة RC المبـينة شكل 12-4(b) قد عـرفت كمـرشح إمرار منخـفض من الدرجة الأولى بتردد نصف القدرة عند $\omega_0 = 1/R_1C_2$ وتسمى الدائرة شكل 12-13 بمرشح بترورث من الدرجة الثانية ولها قطع حاد .

12.6 الاستجابة الترددية من وضع قطب/صفر

تجاوب التردد للشبكة هو قيمة دالة الشبكة H(s) عند $s = j\omega$. وتستخدم هذه الملاحظة لإيجاد قيم $H(j\omega)$ بالرسم وطريقة الرسم يمكن أن ينتج عنها رسم سريع لقيم $H(j\omega)$ موضحاً سلوكها بجوار القطب أو الصفر بدون الحاجة إلى الحل الكامل .

مثـــال 12.4 : أوجد أقطاب وأصفار الدالة $H(s) = 10s / (s^2 + 2s + 26)$ ثم ضعها فى مجال s واستخدم أماكن قطب/ صفر لرسم $H(j\omega)$.



شكل 12–14

H(s) لها قيمة صفر عند $Z_1 = 0$ ونوجـد قطبيها P_1 ، P_2 من العلاقـة $s^2 + 2s + 26 = 0$ حيث $P_1 = -1 + j5$ ، $P_2 = -1 - j5$ ورسم قطب/ صفر مبين شكل 12-14(a) وتكتب دالة الشبكة كالتالى :

$$H(s) = (10)\frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

لكل قيمة لـ s يكون الحد $(s - z_1)$ متجهاً يبدأ من صفر Z_1 وينتهى عند نقطة s فى مجال s . وبالمثل فإن $s - p_1$ ، $s - p_2$ هما متجهان مرسومان من القطبين p_1 ، p_2 على الترتيب إلى النقطة s . وبالتالى فإنه لأى قيمة لـ s يمكن التعبير عن دالة الشبكة بدلالة الثلاث متجهات A ، B ، C كالتالى :

$$H(s) = (10)\frac{A}{B \times C} \quad \text{where } A = (s - z_1),\ B = (s - p_1),\ \text{and } C = (s - p_2)$$

قيمة وزاوية الوجه للمقدار H(s) عند أى نقطة فى مستوى s يمكن الحصول عليها من :

$$|H(s)| = (10)\frac{|A|}{|B| \times |C|} \tag{5a}$$

$$\underline{/H(s)} = \underline{/A} - \underline{/B} - \underline{/C} \tag{5b}$$

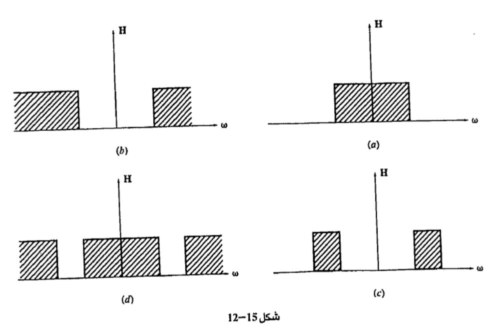
يوضع s على محور $j\omega$ [شكل 12-14(a)] وبتغيير ω من O إلى ∞ وبقياس القيم وزاويا الوجه للمتجهات A ، B ، C يمكن استخدام (5a)، (5b) لإيجاد رسم القيم وزوايا الوجه. وشكل 12-14(b) يبين رسم القيم.

12.7 المرشحات المثالية والعملية

تعتبر الشبكات بوجه عام ذات ترددات محددة والمرشحات هى نوع من الشبكات تصمم لتكون ذات خصائص محددة بالنسبة للتردد فهى تمرر ترددات معينة (مجال الإمرار) وتوقف ترددات أخرى (مجال الإيقاف) ونظرياً فى مجال الإمرار $H(j\omega) = 1$ وفى مجال الإيقاف $H(j\omega) = 0$ وبالتالى فإننا نتعرف على الأقسام التالية من المرشحات: إمرار منخفض [شكل 12-15(a)]، إمرار مرتفع [شكل 12-15(b)]، إمرار نطاق [شكل 12-15(c)]، نطاق قفل (شكل 12-15(d)] والمرشحات المثالية لا يمكن وجودها أو تحقيقها ولكننا يمكن بناء وتصميم المرشحات العملية بحيث تكون قريبة بنسب مقبولة من المثالية وكلما كانت قريبة من خواص المرشح المثالى كلما كانت دائرة المرشح العملى أكثر تعقيداً.

الترتيب

دوائر RC أو RL التى فى بند 2-12 هى مرشحات من الرتبة الأولى وهى بعيدة جداً من المرشحات المثالية وكما هو مبين فى المثال التالى فإن تجاوب التردد يمكن أن يقترب من ذلك الخاص بالمرشحات المثالية إذا زادت رتبة المرشح.



شكل 15–12

مثـــال 12.5 : دوال الشبكة H_1 ، H_2 ، H_3 معطاه بالقيم:

$$(a)\ \mathbf{H}_1 = \frac{1}{s+1} \qquad (b)\ \mathbf{H}_2 = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \qquad (c)\ \mathbf{H}_3 = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

أوجد القيم لتجاوبات التردد لها وبين أن جميع الثلاث دوال ذات إمرار منخفض عند $\omega_0 = 1$.

(أ)
$$|\mathbf{H}_1|^2 = \frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

(ب)
$$|\mathbf{H}_2|^2 = \frac{1}{(1-\omega^2+j\sqrt{2}\omega)(1-\omega^2-j\sqrt{2}\omega)} = \frac{1}{1+\omega^4}$$

(جـ)
$$|\mathbf{H}_3|^2 = \frac{1}{(1+\omega^2)(1-\omega^2+j\omega)(1-\omega^2-j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^6}$$

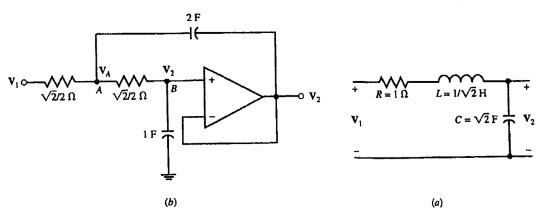
لجميع الثلاث دوال عند $\omega = 0, 1, \infty$ لدينا $|H^2| = 1, 1/2, 0$ على التوالى. وبذلك فإن دوال الشبكة الثلاثة هى إمرار منخفض ولها نفس تردد نصف القدرة وهو $\omega_0 = 1$ وهى مرشحات بتورث

من الرتبة الأولى والثانية والثالثة على التوالى . وكلما زادت رتبة المرشح كلما كان مجال القطع فى تجاوب التردد أكثر حدة .

12.8 المرشحات الغير فعالة والفعالة

المرشحات التى تحتوى على مقاومات وملفات ومكثفات فقط تسمى غير فعالة . وتلك التى تحتوى بالإضافة إلى ذلك منابع تسمى فعالة . والمرشحات الغير فعالة لا تتطلب منابع خارجية للطاقة ويمكن أن تستمر لمدة أطول . وتصنع المرشحات الفعالة غالباً من دوائر RC ومكبرات . وتبين الدائرة شكل 12-16(a) مرشح إمرار منخفض من الدرجة الثانية ويبين شكل الدائرة فى شكل 12-16(b) مرشح فعال بتجاوب تردد V_2/V_1 وهو مكافئ للدائرة شكل 12-16(a) .

مثـــال 12.6 : أوجد دالة الشبكة V_2/V_1 فى الدوائر المبينة فى (أ) شكل 12-16(a) ، (ب) 12-16(b) .



شكل 16—12

(أ) فى شكل 12-16(a) توجد V_2 من V_1 بتقسيم الجهد .

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{Cs}\frac{\mathbf{V}_1}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{\mathbf{V}_1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{LC}\frac{\mathbf{V}_1}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Substituting for $R = 1$, $L = 1/\sqrt{2}$, and $C = \sqrt{2}$, and dividing by $\mathbf{V}_1$, we get

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(ب) فى شكل 12-16(b) وباستخدام KCL عند نقطتين A ، B مع $V_B = V_2$.

العقدة A :
$$(V_A - V_1)\sqrt{2} + (V_A - V_2)\sqrt{2} + (V_A - V_2)2s = 0 \qquad (6a)$$

العقدة B :
$$V_2 s + (V_2 - V_A)\sqrt{2} = 0 \qquad (6b)$$

وبحذف V_A فى (6a) ، (6b) فإننا نحصل على دالة الشبكة $H(s) = V_2/V_1$ وبذلك :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

لاحظ أن الدوائر لشكلى 12-16(a) ، (b) لهما دوال شبكة متطابقة . وهى مرشحات بتورث من الدرجة الثانية ذات إمرار منخفض بتردد نصف القدرة عند $\omega = 1$ rad/s .

12.9 مرشحات إمرار النطاق والرنين

تسمى دالة الشبكة التالية دالة إمرار نطاق .

$$\mathbf{H}(s) = \frac{ks}{s^2 + as + b} \qquad \text{where } a > 0,\ b > 0,\ k > 0 \qquad (7)$$

ويعتبر هذا الاسم مناسباً حينما تكون الأقطاب مركبة وقريبة من محور $j\omega$ ويعيده من نقطة الأصل فى مجال s ويكون تجاوب التردد لدالة إمرار النطاق هى :

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{kj\omega}{b - \omega^2 + aj\omega} \qquad |\mathbf{H}|^2 = \frac{k^2\omega^2}{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2} = \frac{k^2}{a^2 + (b-\omega^2)^2/\omega^2} \qquad (8)$$

وتحدث القيمة العظمى للدالة $|H|$ عند $b - \omega^2 = 0$ أو $\omega = \sqrt{b}$ والتى تسمى تردد المركز ω_0 . وعند تردد المركز يكون $|H|_{max} = |H(\omega_0)| = k/a$ ويكون تردد نصف القدرة عند ω_l ، ω_h حيث :

$$|\mathbf{H}(\omega_l)|^2 = |\mathbf{H}(\omega_h)|^2 = \tfrac{1}{2}|\mathbf{H}(\omega_0)|^2 \qquad (9a)$$

بتطبيق (8) فى (9a) نحصل على ω_l ، ω_h جذرا المعادلة التالية :

$$\frac{(b-\omega^2)^2}{\omega^2} = a^2 \qquad (9b)$$

وبالحل $\omega_l = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2$ (9c)

$$\omega_h = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 \quad (9d)$$

من (9c) ، (9d) نحصل على :

$$\omega_h - \omega_l = a \quad \text{and} \quad \omega_h \omega_l = b = \omega_0^2 \quad (10b)$$

ويعرف عرض النطاق β بالعلاقة

$$\beta = \omega_h - \omega_l = a \quad (10c)$$

ويعرف معامل الجودة Q بالعلاقة

$$Q = \omega_0/\beta = \sqrt{b}/a \quad (10d)$$

ويقيس معامل الجودة حدة تجاوب التردد حول تردد المركز .

ويسمى هذا الأداء بالرنين (انظر البنود من 11-12 إلى 15-12) . وحينما يكون معامل الجودة مرتفعاً فإن ω_1 ، ω_2 يمكن أن يكونا بالتقريب $\omega_0 - \beta/2$ ، $\omega_0 + \beta/2$ على الترتيب .

مثـــــال 12.7 : إذا اعتبرنا دالة الشبكة $H(s) = 10s / (s^2 + 300s + 10^6)$. أوجد تردد المركز وتردد نصف القدرة العلوى والسفلى وعرض النطاق ومعامل الجودة .

تردد نصف القدرة العلوى والسفلى على الترتيب هما :

$$\omega_l = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} - 300/2 = 861.2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} + 300/2 = 1161.2 \text{ rad/s}$$

وعرض النطاق $\beta = \omega_h - \omega_l = 1161.2 - 861.2 = 300$ rad/s

معامل الجودة $Q = 1000 / 300 = 3.3$

مثـــــال 12.8 : أعـد حـل مثـال 7-12 بقيمـة $H(s) = 10s / (s^2 + 30s + 106)$ وأيضاً العلاقـة $\omega_0^2 = 10^6$ ، $\omega = 1000$ rad/s .

وبالتالى

$$\omega_l = \sqrt{30^2/4 + 10^6} - 30/2 = 985.1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \sqrt{30^2/4 + 10^6} + 30/2 = 1015.1 \text{ rad/s}$$

$$\beta = a = 30 \text{ rad/s} \quad \text{and} \quad Q = 1000/30 = 33.3$$

لاحظ أن υ_R ، ω_h يمكن تقريبها بنسبة جيدة من الدقة .

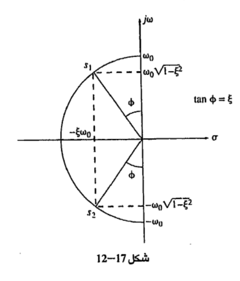
$$\omega_l = \omega_0 - \beta/2 = 1000 - 30/2 = 985 \text{ rad/s} \quad \text{and} \quad \omega_h = \omega_0 + \beta/2 = 1000 + 30/2 = 1015 \text{ rad/s}$$

12.10 التردد الطبيعى ونسبة الخمد

يمكن كتابة مقام دالة إمرار النطاق والمعطاه فى (7) بالتالى :

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

حيث $\omega_0 = \sqrt{b}$ وهى تسمى التردد الطبيعى ، $\xi = a/2\sqrt{b}$ تسمى نسبة الخمد . وحينما تكون $\xi > 1$ فإنه يكون للدائرة قطبان محددان فى الإتجاه السالب لمحور القيم الحقيقية وتسمى خمد زائد . وعندما تكون $\xi = 1$ فإن الدائرة يكون لها قطب حقيقى من الرتبة الأولى عند $-\omega_0$ وتسمى الخمد الحرج . ولقيمته $\xi < 1$ فإنه يكون للدائرة زوج من الأقطاب المترافقة عند $-\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ ، $-\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ ويكون موضع القطبين متماثل حول النصف الأيسر لمحيط دائرة نصف قطرها ω_0 . وتكون زاوية الإزاحة للقطبين هى $\phi = \tan^{-1}\xi$ (انظر شكل 17-12) وتكون الدائرة ذات خمد ناقص ويمكن أن تحتوى على تذبذبات متناقصة . ونلاحظ أن نسبة الخمد تكون مساوية لنصف مقلوب معامل الجودة .



شكل 17—12

11-12 دائرة التوالى RLC ورنين التوالى

دائرة RLC مبينة شكل 12-18 لها فى حالة الدائرة المفتوحة معاوقة دخل كالتالى :

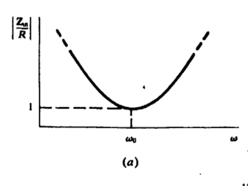
$$Z_{in}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

ويقال للدائرة أنها فى حالة رنين توالى (أو رنين المعاوقة المنخفضة) حيث يكون $Z_{in}(\omega)$ تكون حقيقية (وكذلك $|Z_{in}(\omega)|$ قيمة صغرى) أى أنه حينما

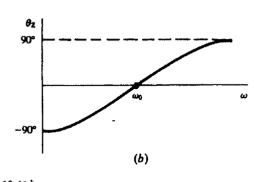
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad \text{or} \qquad \omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

شكل 12-18

شكل 12-19 يبين تجاوب التردد. وتتناسب عكسياً الممانعة السعوية مع ω وتكون كبيرة عن الترددات المنخفضة بينما تتناسب طردياً الممانعة الحثية مع ω فهى تزداد بزيادة التردد. وبالتالى فإن محصلة الممانعة عند ترددات أقل من ω_0 تكون سعوية والزاوية على Z_{in} سالبة. وعند ترددات أعلى من ω_0 تكون الدائرة حثية وتكون زاوية Z_{in} موجبة.



(a)



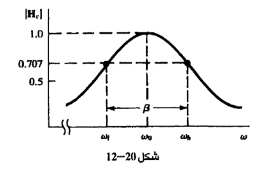
(b)

شكل 12-19

بتقسيم الجهد فإن دالة تحويل الجهد لشكل 18-12 تكون :

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{R}{\mathbf{Z}_{\text{in}}(\omega)} = R\mathbf{Y}_{\text{in}}(\omega)$$

ورسم تجاوب التردد (بالقيم فقط) واضح فى شكل 20-12 والمنحنى هو بالضبط معكوس المرسوم فى شكل 19(a)-12 ولاحظ أنه يحدث الإيقاف عند قيم أقل وأعلى من تردد الرنين للتوالى ω_0 . وتكون النقط حيث تصل قيمة التجاوب إلى 0.707 وهى نقط نصف القدرة (بند 2-13) عند الترددين ω_l ، ω_h ويكون عرض النطاق هو عرض المسافة بين هذين الترددين $\beta = \omega_h - \omega_l$.



شكل 20—12

يمكن تعريف معامل الجودة $Q_0 = \omega_0 L/R$ لدائرة التوالى بالقيمة السابقة عند الرنين (انظر بند 12-12 للتعريف العام لقيمة Q) . ويمكن التعبير عن ترددات نصف القدرة بدلالة عناصر الدائرة أو بدلالة ω_0 ، Q_0 كالتالى :

$$\omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{1}{2Q_0}\right)$$

$$\omega_l = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{1}{2Q_0}\right)$$

انظر المسألة 5-12 وبالطرح تصل إلى :

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

والتى تبين أنه كلما كانت الجودة أعلى كلما كان عرض النطاق أضيق .

12.12 معامـل الجــودة

معامل الجودة أو ميزة الشكل يمكن أن يحدد لأى مركبة أو للدائرة كلها . وهو يعرف بالتالى :

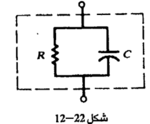
$$Q \equiv 2\pi\left(\frac{\text{maximum energy stored}}{\text{energy dissipated per cycle}}\right)$$

وهى مقدار بدون وحدات . هذا التعريف متفق مع التعريفات المعطاه فى بندى 9-12 ، 11-12 .
وفى الملف العملى الذى يحتوى على كلا المقاومة والحث يمكن تمثيله فى شكل 12-12 وتكون القيمة العظمى للطاقة المختزنة هى $(1/2)\ LI^2_{max}$ بينما تكون الطاقة المستهلكة كذبذبة الواحدة .

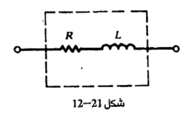
$$(I^2_{eff}R)\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{I^2_{max}R\pi}{\omega}$$

Hence, $$Q_{ind} = \frac{\omega L}{R}$$

ويمكن تمثيل المكثف العملى بمجموعة توازى من R ، C كما هو مبين شكل 22-12 وتكون الطاقة العظمى المختزنة هما $(1/2)\ CV^2_{max}$ والطاقة المستهلكة فى الذبذبة الواحدة $V^2_{max}\pi/R\omega$ وبذلك $Q_{cap} = \omega CR$.



شكل 22—12



شكل 21—12

ونستنتج قيمة Q فى دائرة التوالى RLC من المسألة 12-6(a) . وهى تستخدم غالباً فى حالة الرنين التى تكون لها القيمة المكافئة .

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

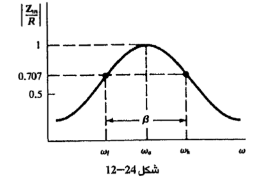
12.13 دائرة التوازى RLC - رنين التوازى

شبكة التوازى RLC مبينة شكل 23-12 لاحظ أن $V_2 = V_1$ وتكون مسامحة الدخل فى حالة الدائرة المفتوحة .

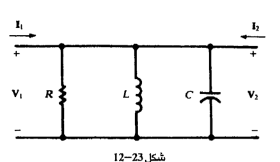
$$\mathbf{Y}_{in}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{\mathbf{Z}_{in}(\omega)}$$

وستكون الشبكة فى حالة رنين توازى (أو رنين المعاوقة الكبيرة) حينما $Y_{in}(\omega)$ وبالتالى $Z_{in}(\omega)$ حقيقية (وكذلك $|Y_{in}(\omega)|$ تكون قيمة صغرى ، $|Z_{in}(\omega)|$ تكون قيمة عظمى أى أنه حينما :

$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \qquad \text{or} \qquad \omega = \omega_a \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



شكل 24-12



شكل 23-12

الرمز ω_a يستخدم الآن للتعبير عن الكمية $1/\sqrt{LC}$ لكى تميز الرنين من حالة رنين المعاوقة المنخفض ويمكن أن تحتوى شبكات التوالى والتوازى المركبة على عدة ترددات رنين للمعاوقة المرتفعة ω_a وعدة ترددات رنين للمعاوقة المنخفضة ω_0 .

والشكل العام لمعاوقة الدخل :

$$\frac{\mathbf{Z}_{in}(\omega)}{R} = \frac{1}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

قد رسمت (بالقيم فقط) فى شكل 24-12 وترددات نصف القدرة ω_l ، ω_h مبينتان على الرسم وبالمثل لرنين التوالى فإن عرض النطاق يعطى بالعلاقة :

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a}$$

حيث Q_a وهى معامل الجودة لدائرة التوازى عند $\omega = \omega_a$ لها التعريف المكافىء التالى :

$$Q_a = \frac{R}{\omega_a L} = \omega_a RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

انظر المسألة 12-16(b) .

12.14 دائرة التوازى LC العملية

تستخدم غالباً دائرة التوازى LC فى الدائرة الالكترونية كدائرة تنغيم أو نبيطة اختبار التردد. وبينما يستخدم المكثف غالباً ويعامل كما لو كان عنصر سعوى خالص فإنه باستخدام الملف لا بد من اعتبار ما فيه من مفاقيد وتمثيل هذه العملية (المحتوية على LC توازى) مبين شكل 12-25 وتكون مسامحة الدخل :

$$\mathbf{Y}_{\text{in}}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

وللرنين

$$\omega_a C = \frac{\omega_a L}{R^2 + (\omega_a L)^2} \qquad \text{or} \qquad \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

وعند تردد الرنين $Y_{in}(\omega) = RC/L$ ومن بند 12-11 فإن قيمة Q للعنصر الحثى تكون :

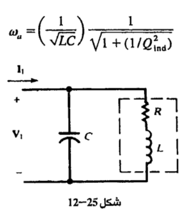
$$Q_{\text{ind}} = \frac{\omega_a L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - 1}$$

إذا كان $\omega_a \approx 1/\sqrt{LC}$.

$$\left|\frac{\mathbf{Z}_{\text{in}}(\omega_a)}{R}\right| \approx Q_{\text{ind}}^2$$

تجاوب التردد يكون مشابهاً لحالة دائرة التوازى RLC فيما عد أن رنين المعاوقة العالية يحدث عند ترددات منخفضة لقيم Q_{ind} المنخفضة وهذا يصبح صحيحاً حينما نكتب ω_a المذكورة كالتالى :

$$\omega_a = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+(1/Q_{\text{ind}}^2)}}$$



شكل 25–12

12.15 تحويلات دوائر التوالى والتوازى

إنه من المناسب فى بعض الأحيان عند تحليل الدوائر أن نحول دائرة التوالى RL إلى شكل التوازى (انظر شكل 26-12) . فإذا كان لدينا R_s ، L_s والتردد المستخدم ω فإن قيم العناصر R_p ، L_p المكافئة لدائرة التوازى تحدد بمساواة المسامحتين .

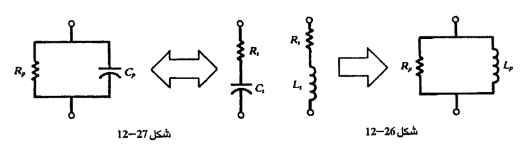
$$\mathbf{Y}_s = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

وبالتالى تكون النتائج :

$$R_p = R_s\left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s}\right)^2\right] = R_s(1 + Q_s^2)$$

$$L_p = L_s\left[1 + \left(\frac{R_s}{\omega L_s}\right)^2\right] = L_s\left(1 + \frac{1}{Q_s^2}\right)$$

إذا كان $Q \geq 10$ ، $R_p \approx R_s Q_s$ ، $L_p \approx L_s$.



شكل 27–12

شكل 26–12

وهناك بعض الحالات التى تستخدم فيها دائرة RC فى كلا الشكلين التوالى والتوازى (انظر شكل 12-27) وبمساواة إما المعاوقات أو المسامحات فإننا نحصل على :

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2} = \frac{R_p}{1 + Q_p^2}$$

$$C_s = C_p\left[1 + \frac{1}{(\omega C_p R_p)^2}\right] = C_p\left(1 + \frac{1}{Q_p^2}\right)$$

وذلك للتحويل من التوازى إلى التوالى وأيضاً :

$$R_p = R_s\left[1 + \frac{1}{(\omega C_s R_s)^2}\right] = R_s(1 + Q_s^2)$$

$$C_p = \frac{C_s}{1 + (\omega C_s R_s)^2} = \frac{C_s}{1 + (1/Q_s)^2}$$

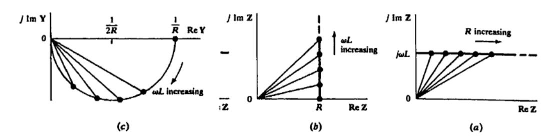
وذلك للتحويل من التوالى إلى التوازى وبالتالى فإن عملية التكافؤ تعتمد على التردد المستخدم .

12.16 أشكال المحل الهندسى

وجدنا من السابق تجاوب التردد والشبكة وذلك برسم كلاً من القيمة والزاوية منفصلين لدالة شبكة مناسبة بالنسبة للتردد ω . ونفس هذه المعلومة يمكن تقديمها فى شكل واحد حيث توجد المنحنى (شكل المحل الهندسى) فى المستوى المركب مرسوماً بالنقطة التى تمثل دالة الشبكة حينما تتغير ω من O إلى ∞ . وسنناقش فى هذا البند أشكال المحل الهندسى لمعاوقة الدخل ومسامحة الدخل وفى بعض الحالات سيكون المتغير ليس ω ولكنه عامل آخر (مثل المقاومة R) .

فى دائرة التوالى RL شكل 12-28(a) يبدو محل هندسى -Z حينما ωL تكون ثابتة ويكون R متغيراً ويبين شكل 12-28(c) محل هندسى -Y حينما تكون R ثابتة وL أو ω متغيرة . والمحل الهندسى الأخير هذا نحصل عليه من العلاقة :

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega L/R)$$



شكل 28—12

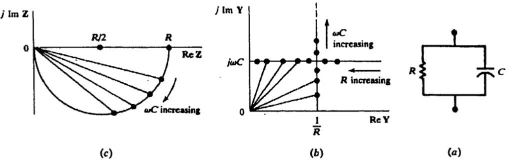
لاحظ

$$Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} \angle -45^{\circ}$$

وبرسم بعض النقط الأخرى يتأكد شكل نصف الدائرة للمحل الهندسى بالمركز عند 1/2R ونصف القطر 1/2R . ويعطى أياً من الشكلين (b)29-12 ، (c)28-12 تجاوب التردد للدائرة.

ولدائرة التوازى RC لها المحلان الهندسيان -Y ، -Z المبين شكل 29-12 وهى مستنتجة من :

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C \qquad \text{and} \qquad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega CR)$$



شكل 29—12

ولدائرة التوالى RLC فإن المحل الهندسى -Y مع ω متغيرة يمكن تحديدها بكتابة :

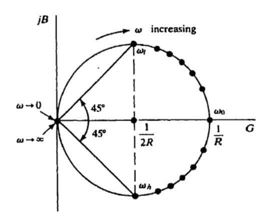
$$Y = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

لذلك $$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

وتعتمد كلاً من G ، B على علاقة ω مع X وبحذف X من كلا التعبيران نحصل على معادلة المحل الهندسى بالشكل :

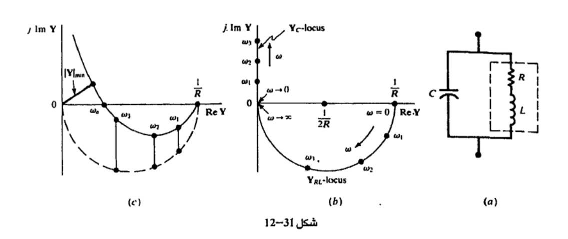
$$G^2 + B^2 = \frac{G}{R} \qquad \text{or} \qquad \left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

أى الدائرة شكل 30-12 . لاحظ أن النقط متساوية القيمة $\omega = \omega_l$ ، $\omega = \omega_0$ ، $\omega = \omega_h$.



شكل 30-12

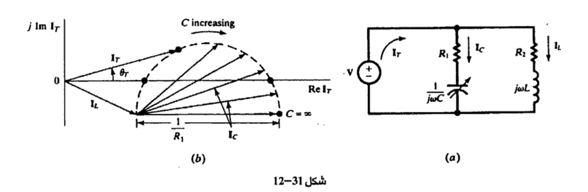
وللدائرة العملية التى درست بند 14-12 فإه يمكن إنشاء محل هندسى -Y بتجميع المحل الهندسى لفرع C ولفرع RL . ولبيان الجمع فإنه يتم وضع علامة على النقط الخاصة للترددات $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ على كل محل هندسى على حده وأيضاً على المحل الهندسى للمجموع كالمبين شكل (c)31-12 . ويبدو أن $|Y|_{min}$ تحدث عند تردد أكبر من ω_a أى أن الرنين يكون معاوقة مرتفعة ولكنه لا يكون القيمة العظمى للمانعة . والسبب فى ذلك أن G يتغير مع ω_2 (انظر بند 14-12) ويتغير بطريقة بحيث أنه عند $B = 0$ فإن ذلك لا يسبب وصول قيمة $G^2 + B^2$ تلقائياً إلى القيمة الصغرى . والتفرقة بين الرنين وترددات المسامحة الصغرى محكومة بقيمة Q للملف . وكلما كانت Q_{ind} كبيرة فإن ذلك يؤول إلى قيم أصغر فى R . ويبدو من شكل (b)31-12 أن القيم الصغيرة فى R يؤدى إلى نصف دائرة أكبر والذى عند تجميعه مع محل هندسى -Y_C يعطى قيم أكبر فى ω_a وأصغر لتردد المسامحة الصغرى حينما $Q_{ind} \geq 10$ فإن كلا الترددان يمكن اعتبارهما متطابقان .



شكل 12–31

يمكن اختيار حالة الدائرة ذات الفرعين RC ، RL المبينة شكل 12-32(a) بجمع المحل الهندسى للمسامحة للفرعين. وإذا كانت $V = V\angle 0°$ ثابتة فهذا يعنى جمع المحلين الهندسيين لتيارى الفرعين. وإذا اعتبرنا تغير لقيمة C بدون حدود وكلاً من R_1 ، R_2 ، ω ثوابت فإن التيار I_L يكون ثابتاً كما فى شكل 12-32(b) والمحل الهندسى لنصف الدائرة للتيار I_C يضاف إلى I_L لينتج المحل الهندسى للتيار I_T.

ويؤول رنين الدائرة لقيمة $\theta_T = 0$. وقد يحدث هذا لقيمتين للمعامل C الحقيقى الموجب [وهذه الحالة مبينة شكل 12-32(b)] لقيمة واحدة وأيضاً ليس لأى قيمة وذلك يعتمد على عدد الجذور الحقيقية الموجبة للمعادلة $I_m Y_T(C) = 0$.



شكل 12–31

مسائل محلولة

12.1 فى الشبكة ذات الجهدين المبينة شكل 33-12 : $R_1 = 7\ k\Omega$ ، $R_2 = 3\ k\Omega$ أوجد نسبة الجهد V_2/V_1 . (أ) عند عدم الحمل . (ب) عند $R_L = 20\ k\Omega$.

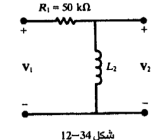
$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{7+3} = 0.30$$

(أ) مع $R_L = 20\ k\Omega$

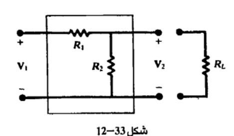
$$R_p = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \frac{60}{23} \quad k\Omega$$

and
$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{R_p}{R_1 + R_p} = \frac{60}{221} = 0.27$$

نسبة الجهد لا تعتمد على التردد . وقد خفض الحمل 20 kΩ النسبة من 0.30 إلى 0,27



شكل 34-12



شكل 33-12

12.2 (أ) أوجد L_2 فى دائرة الإمـرار العالـى المبيـنة شـكل 24-12 إذا كـان $|H_\upsilon(\omega)| = 0.50$ عنـد 1.50 MHz . (ب) عند أى تردد يكون $|H_\upsilon| = 0.90$؟

(أ) من بند 2-12 مع $\omega = R_1 / L_2$.

$$|\mathbf{H}_v(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}}$$

Then,
$$0.50 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x/50)^2}} \qquad \text{or} \qquad f_x = 50\sqrt{3}\ \text{MHz}$$

and
$$L_2 = \frac{R_1}{2\pi f_x} = \frac{50 \times 10^3}{2\pi(50\sqrt{3} \times 10^6)} = 91.9\ \mu\text{H}$$

(ب)
$$0.90 = \frac{1}{1 + (50\sqrt{3}/f)^2} \qquad \text{or} \qquad f = 179\ \text{MHz}$$

12.3 يمكن عمل مقسم الجهد المستخدم للترددات العالية بمكثفين C_1 ، C_2 فى الشبكة ذات الجهدين المبينة شكل 12-12 فى حالة الدائرة المفتوحة أوجد C_2 إذا كان $C_1 = 0.01\ \mu F$ ، $|H| = 0.20$.

من جدول 12-1

$$\mathbf{H}_v = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{1/j\omega C_2}{\dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{1}{j\omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

ولذلك

$$0.20 = \frac{0.01}{0.01 + C_2} \qquad \text{or} \qquad C_2 = 0.04\ \mu\text{F}$$

ويبدو أن نسبة الجهد لا تتوقف على التردد فى حالة الدائرة المفتوحة .

12.4 أوجد التردد الذى عنده $|H_v| = 0.50$ لشبكة RC ذات الإمرار المنخفض المبينة شكل 12-35 .

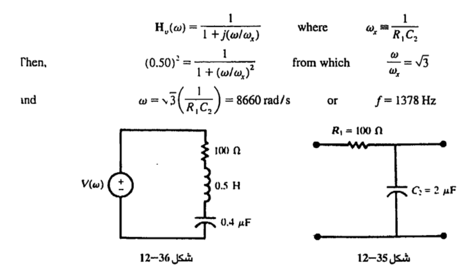
$$\mathbf{H}_v(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)} \qquad \text{where} \qquad \omega_x \equiv \frac{1}{R_1 C_2}$$

Then,

$$(0.50)^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_x)^2} \qquad \text{from which} \qquad \frac{\omega}{\omega_x} = \sqrt{3}$$

and

$$\omega = \sqrt{3}\left(\frac{1}{R_1 C_2}\right) = 8660\ \text{rad/s} \qquad \text{or} \qquad f = 1378\ \text{Hz}$$



شكل 12–36 شكل 12–35

12.5 لدائرة التوالى RLC المبينة شكل 12-36 أوجد تردد الرنين $\omega_0 = 2\pi f_0$. أوجد أيضاً ترددات نصف القدرة وعرض النطاق β .

$$\mathbf{Z}_{\text{in}}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

عند الرنين $Z_{in}(\omega) \doteq R$ ، $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.5(0.4 \times 10^{-6})}} = 2236.1\ \text{rad/s} \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 355.9\ \text{Hz}$$

وعلاقة القدرة

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2 R}{|\mathbf{Z}_{\text{in}}|^2}$$

تبين أن $P_{max} = V^2_{eff}/R$ تحدث عند $\omega = \omega_0$ وأن $P = (1/2)P_{max}$ عند $|Z_{in}|^2 = 2R^2$ أى أنه عند .

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \qquad \text{or} \qquad \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

وباعتبار الإشارة العليا فإنه يوجد جذر واحد حقيقى موجب .

$$\omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2338.3 \text{ rad/s} \qquad \text{or} \qquad f_h = 372.1 \text{ Hz}$$

وبالنسبة للإشارة السفلى يكون الجذر الوحيد الموجب .

$$\omega_l = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2138.3 \text{ rad/s} \qquad \text{or} \qquad f_l = 340.3 \text{ Hz}$$

12.6 استنتج قيمة Q فى حالة (أ) دائرة توالى RLC . (ب) دائرة توازى RLC .

(أ) تعطى الطاقة اللحظية المختزنة فى مجال الزمن بالقيمة :

$$W_s = \tfrac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$$

وبالنسبة للقيمة العظمى .

$$\frac{dW_s}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = i\left(L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\right) = i(v_L + v_C) = 0$$

وبذلك فإن القيمة العظمى للطاقة المختزنة وهى W_s عند $i = 0$ أو عند $v_L + v_C = 0$ أيهما تكون أكبر . والآن فإن جهد المكثف وبالتالى الشحنة يتأخر التيار بزاوية $90°$ وبالتالى $i = 0$ تعطى $q = \pm Q_{max}$.

$$W_s|_{i=0} = \frac{Q_{\text{max}}^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CV_{C\text{max}}^2 = \tfrac{1}{2}C\left(\frac{I_{\text{max}}}{\omega C}\right)^2 = \frac{I_{\text{max}}^2}{2C\omega^2}$$

ومن ناحية أخرى عندما $\upsilon_L + \upsilon_C = 0$ تؤدى إلى $\upsilon_L = \upsilon_C$ ، التيار $i = \pm I_{max}$ (انظر شكل المتجهات 37-12) أى أن :

$$W_s|_{\upsilon_L+\upsilon_C=0} = \tfrac{1}{2}LI^2_{max}$$

وهذا يؤدى إلى :

$$W_{smax} = \begin{cases} I^2_{max}/2C\omega^2 & (\omega \le \omega_0) \\ LI^2_{max}/2 & (\omega \ge \omega_0) \end{cases}$$

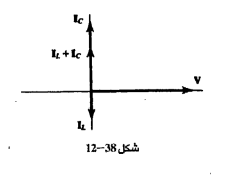
الطاقة المستهلكة لكل ذبذبة (فى المقاومة) هى $W_d = I^2_{max}R\pi/\omega$. وبالتالى :

$$Q = 2\pi \frac{W_{smax}}{W_d} = \begin{cases} 1/\omega CR & (\omega \le \omega_0) \\ \omega L/R & (\omega \ge \omega_0) \end{cases}$$

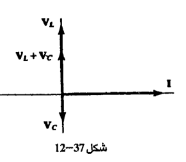
(ب) مع مجموعة التوازى باستخدام الجهد $\upsilon(t)$.

$$W_s = \tfrac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2C}q_C^2$$

and
$$\frac{dW_s}{dt} = Li_L\frac{di_L}{dt} + \frac{q_C}{C}i_C = \upsilon(i_L + i_C) = 0$$



شكل 38–12



شكل 37–12

If $\upsilon = 0$, then $q_C = 0$ and

$$i_L = \pm I_{Lmax} = \pm \frac{V_{max}}{\omega L}$$

giving
$$W_{s|\upsilon=0} = \frac{V^2_{max}}{2L\omega^2}$$

إذا كان $i_C + i_L = 0$ فإنه (انظر شكل 12-28) $i_L = i_C = 0$ ، $q_C = \pm CV_{max}$.

$$W_s|_{i_L+i_C=0} = \tfrac{1}{2}CV_{max}^2$$

Therefore,

$$W_{smax} = \begin{cases} V_{max}^2/2L\omega^2 & (\omega \le \omega_a) \\ CV_{max}^2/2 & (\omega \ge \omega_a) \end{cases}$$

الطاقة المستهلكة لكل ذبذبة فى R هى $W_d = V^2\pi/R\omega$ وبالتالى :

$$Q \doteq 2\pi \frac{W_{smax}}{W_d} = \begin{Bmatrix} R/L\omega & (\omega \le \omega_a) \\ \omega CR & (\omega \ge \omega_a) \end{Bmatrix}$$

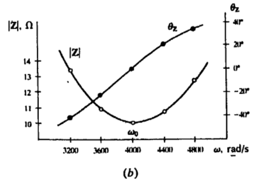
12.7 دائرة توالى ذات ثلاث عناصر هى $R = 10\ \Omega$ ، $L = 5$ mH ، $C = 175\ \mu F$. ارسم قيم وزاوية Z كدالة فى ω لقيم ω من $0.8\ \omega_0$ إلى $1.2\ \omega_0$.

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 4000$ rad/s. At ω_0,

$$X_L = (4000)(5 \times 10^{-3}) = 20\ \Omega \qquad X_C = \frac{1}{(4000)(12.5 \times 10^{-6})} = 20\ \Omega$$

$$\mathbf{Z} = 10 + j(X_L - X_C) = 10 + j0 \quad \Omega$$

يمكن الحصول بسهولة على قيم الممانعات عند الترددات الأخرى . وبيان جدول ورسم للممانعات والمعاوقات فى شكلى 12-39(a) ، 12-39(b) .



(b)

ω	X_L	X_C	Z	
3200	16	25	$10 - j9$	$13.4\angle -42°$
3600	18	22.2	$10 - j4.2$	$10.8\angle -22.8°$
4000	20	20	10	$10\angle 0°$
4400	22	18.2	$10 + j3.8$	$10.7\angle 20.8°$
4800	24	16.7	$10 + j7.3$	$12.4\angle 36.2°$

(a)

شكل 12—39

12.8 لدائرة التوالى RLC بين أن $\omega_0 = \sqrt{\omega_l \omega_h}$

من نتائج المسألة 12.5 .

$$\omega_l\omega_h = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} - \frac{R}{2L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{R}{2L}\right) = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

12.9 احسب معامل الجودة لدائرة التوالى RLC التى بها $R = 20\ \Omega$ ، $L = 50$ mH ، $C = 1\ \mu$F باعتبار (أ) $Q = \omega_0 L/R$ ، (ب) $Q = 1/\omega_0 CR$ ، (جـ) $Q = \omega_0/\beta$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.05 \times 10^{-6}}} = 4472 \text{ rad/s}$$

$$\omega_l = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4276.6 \text{ rad/s} \qquad \omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4676.6 \text{ rad/s}$$

and $\beta = \omega_h - \omega_l = 400$ rad/s.

(a)
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{4472(0.050)}{20} = 11.2$$

(b)
$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{4472(10^{-6})20} = 11.2$$

(c)
$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{4472}{400} = 11.2$$

12.10 مثل ملف بدائرة مكونة من $L = 50$ mH ، $R = 15\ \Omega$. أحسب معامل الجودة عند (أ) 10 KHz ، (ب) 50 KHz .

(a)
$$Q_{\text{coil}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi(10 \times 10^3)(50 \times 10^{-3})}{15} = 209$$

(b)
$$Q_{\text{coil}} = 209\left(\frac{50}{10}\right) = 1047$$

12.11 حول ثوابت الدائرة فى المسألة 12-10 إلى شكل التوازى (أ) عند 10 Hz ، (ب) عند 250 Hz .

(a)
$$R_p = R_s\left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s}\right)^2\right] = R_s[1 + Q_s^2] = 15[1 + (209)^2] = 655 \text{ k}\Omega$$

or, since $Q_s \gg 10$, $R_p \approx R_s Q_s^2 = 15(209)^2 = 655$ kΩ.

$$L_p = L_s\left(1 + \frac{1}{Q_s^2}\right) \approx L_s = 50 \text{ mH}$$

At 250 Hz, (ب)

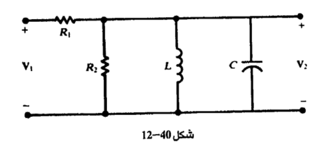
$$Q_s = \frac{2\pi(250)(50 \times 10^{-3})}{15} = 5.24$$

$$R_p = R_s[1 + Q_s^2] = 15[1 + (5.24)^2] = 426.9\ \Omega$$

$$L_p = L_s\left[1 + \frac{1}{Q_s^2}\right] = (50 \times 10^{-3})\left[1 + \frac{1}{(5.24)^2}\right] = 51.8\ \text{mH}$$

يمكن عـمل تحويل عناصر الدائرة من التوالى إلى التوازى عند تردد محور فإن ذلك لا يصلح لتردد آخر . لاحظ أنه فى (ب) حينما تكون $Q_s < 10$ فإن L_p يختلف عن L_s .

12.12 للدائرة المبينة شكل 40-12 (أ) أوجد دالة تحويل الجهد $H_v(\omega)$ ، (ب) أوجد التردد الذى عنده تكون الدالة حقيقية .



شكل 40–12

(أ) ضع Z_2 ، Y_2 لتمثل المعاوقة والمسامحة لدائرة التوازى المغلقة R_2LC .

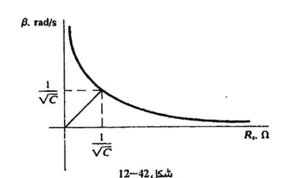
$$\mathbf{H}_v(\omega) = \frac{\mathbf{Z}_2}{R_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{1}{1 + R_1\mathbf{Y}_2} = \frac{1}{1 + R_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

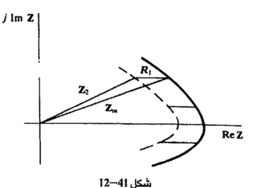
(ب) تكون دالة التحويل موجبة حينما يكون Y_2 حقيقية أى أنه عند

$$\omega = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

عند $\omega = \omega_0$ فإنه ليس فقط $|Z_2|$ ، $|H_v|$ قيمة عظمى ولكن أيضاً $|Z_{in}| = |R + Z_2|$ تكون قيمة عظمى (لأن R_1 حقيقية وموجبة – انظر شكل المحل الهندسى شكل 41-12) .



شكل 12—42



شكل 12—41

12.13 أوجد عرض النطاق β للدائرة المبينة شكل 12-40 وارسم β مع المعامل

$$R_x \equiv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

هنا تحدد ترددات نصف القدرة بالحالة $|H_{\upsilon}(\omega)| = 0.707\ |H_{\upsilon}|_{max}$ من المسألة 12-12 .

$$R_1\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \pm\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \qquad \text{or} \qquad R_x\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \pm 1$$

ولكن (بالرجوع إلى بند 12-13) نجد أنها نفس المعادلة لترددات نصف القدرة لدائرة توازى R_xLC لذلك :

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a} = \frac{1}{CR_x}$$

ورسم القطع الزائد مبين فى شكل 12-42 .

12.14 فى دائرة شكل 12-40 ضع $R_1 = R_2 = 2\ k\Omega$ ، $L = 10\ mH$ ، $C = 40\ nF$. أوجد تردد الرنين وعرض النطاق وقارن بالنتائج لقيمة $R_1 = 0$ (أى دائرة توازى خالصة) .

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{(10 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-9})}} = 5 \times 10^4\ \text{rad/s}$$

أو $F_a = 7988\ Hz$ مع $R_s = 2^2/4 = 1\ k\Omega$ والمسألة 12-13 تعطى :

$$\beta = \frac{1}{(40 \times 10^{-9})(1 \times 10^3)} = 2.5 \times 10^4\ \text{rad/s}$$

لا يمكن استخدام النتائج فى المسألة 12-12 ، 12-13 حينما 0 <-- R لأن نسبة الجهد عند نهاية الحدود تكون مطابقة للوحدة وبذلك لا يمكن تحقيق أى معلومات عن دائرة التوازى الباقية R_2LC (لاحظ أن ∞<--β كلما 0 <-- R_x) وفيما عدا ذلك فإننا يجب أن نتعامل مع دالة معاوقة الدخل كما فى بند 12-13 حيث :

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

وكالسابق

$$\beta = \frac{1}{CR_2} = 1.25 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

12.15 للدائرة شكل 12-40 ، $R_1 = 5$ kΩ ، $C = 10$ nF فإذا كان $V_2/V_1 = 0.8\ \angle 0°$ عند 15 KHz احسب R_2 ، L وعرض النطاق .

تبين الزاوية صفر لنسبة الجهد H_v أن الدائرة ككل وجزء التوازى نفسه فى حالة رنين (انظر المسألة 12-14) ومن ثم :

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad L = \frac{1}{\omega_a^2 C} = \frac{1}{[2\pi(15 \times 10^3)]^2(10 \times 10^{-9})} = 11.26 \text{ mH}$$

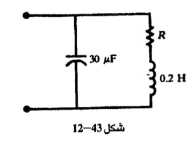
ومن المسألة 12-12 .

$$\mathbf{H}_v(\omega_a) = 0.8\underline{/0°} = \frac{1}{1 + (R_1/R_2)} . \qquad \text{whence} \qquad R_2 = \frac{R_1}{0.25} = 20 \text{ k}\Omega$$

وبالتالى فإن $R_x = (5)\ (20)\ 25 = 4$ kΩ وتعطى المسألة 12-3 .

$$\beta = \frac{1}{(10 \times 10^{-9})(4 \times 10^3)} = 2.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

12.16 قارن تردد الرنين الدائرة المبينة شكل 12-43 حينما 0 = R بتلك حينما Ω 50 = R .



شكل 43–12

حينما R = 0 تكون الدائرة ذات جزء توازى LC مع

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2)(30 \times 10^{-6})}} = 408.2 \text{ rad/s} \qquad \text{or} \qquad f_a = 65 \text{ Hz}$$

وحينما R = 50 Ω فإن :

$$\mathbf{Y}_{in} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

وفى حالة الرنين فإن ImY_{in} يكون صفراً أى أن :

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

ومن الواضح أنه كلما R --> 0 فإن هذه القيمة تقل إلى القيمة للجزء LC الخاص وبالتعويض حسابياً فإن القيمة الجذرية تكون 0.791 وبذلك :

$$\omega_a = 408.2(0.791) = 322.9 \text{ rad/s} \qquad \text{or} \qquad f_a = 51.4 \text{ Hz}$$

12.17 عند قياس ملف عملى عند التردد 10 MHz وجد أن L = 8.0 μH ، $Q_{ind} = 40$. (أ) أوجد قيمة المكثف المثالى C لرنين التوازى عند 10 MHz وأحسب عرض النطاق β المناظر لذلك . (ب) أعد الحل باستخدام مكثف عملى بمعامل تبديد $D = Q^{-1}_{cap} = 0.005$ عند 10 MHz بدلاً من المكثف المثالى .

(أ) من بند 14-12 .

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{1}{\sqrt{1 + Q_{ind}^{-2}}}$$

$$\text{or} \qquad C = \frac{1}{\omega_a^2 L(1 + Q_{ind}^{-2})} = \frac{1}{[2\pi(10 \times 10^6)]^2(8.0 \times 10^{-6})\left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 31.6 \text{ pF}$$

باستخدام بند 15-12 لتحويل فرع التوالى RL شكل 15-12 إلى توازى عند تردد الرنين فإن :

$$R_p = R(1 + Q_{ind}^2) = \frac{\omega_a L}{Q_{ind}}(1 + Q_{ind}^2)$$

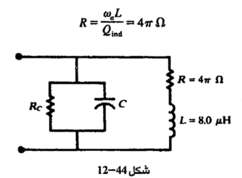
من بند 13-12 فإن :

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a} = \frac{\omega_a^2 L}{R_p} = \frac{\omega_a Q_{ind}}{1 + Q_{ind}^2} = \frac{2\pi(10 \times 10^6)(40)}{1 + 1600} \text{ rad/s}$$

أو 0.25 MHz

(ب) من الدائرة المبينة شكل 44-12 فإن الجزء (a) يعطى مقاومة الملف العملى .

$$R = \frac{\omega_a L}{Q_{ind}} = 4\pi\ \Omega$$



شكل 44-12

وأيضاً نعلم من معامل التبديد أن :

$$\frac{1}{\omega_a C R_C} = 0.005$$

مسامحة الدخل هى :

$$\mathbf{Y}_{in} = \frac{1}{R_C} + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \left[\frac{1}{R_C} + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}\right] + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

والتى تختلف من مسامحة الدخل فى الجزء (أ) فى الجزء الحقيقى فقط . وحيث أن الجزء التخيلى يحتوى نفس L ، R ويجب أن يتلاشى عند نفس التردد فإن C يجب أن تكون نفسها كما فى (أ) وبالتالى C = 31.6 PF .

وعند ثبوت قيمة C فإن عرض النطاق يتناسب عكسياً مع المقاومة . ومع المكثف العملى فإن مقاومة التوازى فى النهاية تكون :

$$R' = \frac{R_p R_C}{R_p + R_C}$$

حيث R_p كما حسبت فى الجزء (أ) وبذلك :

$$\frac{\beta}{0.25\ \text{MHz}} = \frac{R_p}{R'} = 1 + \frac{R_p}{R_C} = 1 + \frac{(\omega_a L/Q_{ind})(1 + Q_{ind}^2)}{1/\omega_a C(0.005)}$$

$$= 1 + \frac{(1 + Q_{ind}^2)(0.005)}{Q_{ind}(1 + Q_{ind}^{-2})}$$

$$= 1 + \frac{(1 + 1600)(0.005)}{40\left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 1.2$$

وبذلك $\beta = 0.30$ MHz

ويكون المكثف ذو المقاومة له نفس تأثير أى حمل كمقاومة موضوع على طرفى جزء توازى، وتقل قيمة Q_0 بينما يزداد عرض النطاق فى حين أن f_a لا تتغير .

12.18 ملف ذو مقاومة فى تمثيل دائرة التوالى يحتوى على $R = 25\ \Omega$ ، $C = 20$ pF . أوجد تمثيل دائرة التوازى المكافئة عند 50 KHz .

من بند 15-12 أو بوضع 0 <-- L فى المسألة (a)6-12 .

$$Q_s = \frac{1}{\omega C_s R_s} = \frac{1}{2\pi(50 \times 10^3)(20 \times 10^{-12})(25)} = 6370$$

ولقيمة Q الكبيرة هذه فإن :

$$R_p \approx R_s Q_s^2 = 1010\ \text{M}\Omega \qquad C_p \approx C_s = 20\ \text{pF}$$

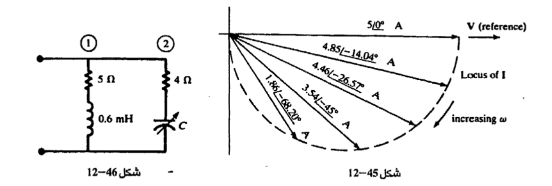
12.19 منبع ذو تردد متغير به $V = 100\angle 0^\circ$ وصل بدائرة توالى RL بها $R = 20\ \Omega$ ، $L = 100$ mH . أحسب التيار I لقيم $\omega = 0, 500, 1000, 2000, 5000$ rad/s . ارسم جميع التيارات على نفس شكل المتجهات وبين المحل الهندسى للتيارات .

$$Z = R + jX_L = R + j\omega L$$

يبين جدول 2-12 جميع الحسابات . فعند زاوية متجه الجهد صفراً فإن تغير المحل الهندسى للتيار مع تغير ω يكون نصف دائرة كالمبينة شكل 45-12 . وحيث أن $I = VY$ مع ثبوت القيمة V فإن شكل 45-12 يكون أساساً مثل شكل (a)28-12 وهو المحل الهندسى للمسامحة لدائرة التوالى RL .

جـــدول 12-2

ω, rad/s	X_L, Ω	R, Ω	Z, Ω	I, A
0	0	20	$20\angle 0°$	$5\angle 0°$
500	5	20	$20.6\angle 14.04°$	$4.85\angle -14.04°$
1000	10	20	$22.4\angle 26.57°$	$4.46\angle -26.57°$
2000	20	20	$28.3\angle 45°$	$3.54\angle -45°$
5000	50	20	$53.9\angle 68.20°$	$1.86\angle -68.20°$



شكل 46–12 شكل 45–12

12.20 الدائرة المبينة شكل 46-12 فى حالة رنين لقيمتين للمكثف C عندما يكون تردد المنبع 5000 rad/s . أوجد هاتين القيمتين للمكثف C وأنشأ شكل المحل الهندسى للمسامحة التى توضح هذه الحقيقة .

عند التردد المعطى $X_L = 3\ \Omega$ وبذلك تكون مسامحة هذا الفرع الثابت هى :

$$Y_1 = \frac{1}{5+j3} = 0.147 - j0.088 \quad S$$

المحل الهندسى النصف دائرى للفرع 2 له نصف قطره $r = 1/2\ R = 0.125\ S$. وتكون المسامحة الكلية هى مجموع المسامحة الثابتة Y_1 والمسامحة المتغيرة Y_2 وفى شكل 47-12 يضاف المحل الهندسى النصف دائرى للرقم المركب الثابت Y_1 ويحدث رنين الدائرة عند النقطتين a ، b حيث Y_T حقيقية .

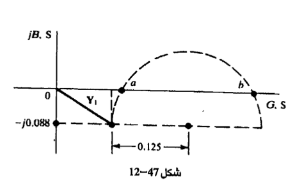
$$Y_T = 0.147 - j0.088 + \frac{1}{4 - jX_C}$$

والتى تكون حقيقية إذا كان .

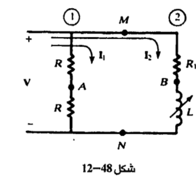
$$X_c^2 - 11.36X_c + 16 = 0$$

أو $X_{C1} = 9.71\ \Omega$ ، $X_{C2} = 1.65\ \Omega$ مع $\omega = 5000$ rad/s .

$$C_1 = 20.6\ \mu F \qquad C_2 = 121\ \mu F$$



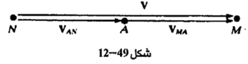
شكل 12-47



شكل 12-48

12.21 بين بأشكال المحل الهندسى أن قيمة الجهد بين النقط A ، B فى شكل 48-12 تكون دائماً نصف قيمة جهد المنبع V كلما تغيرت L .

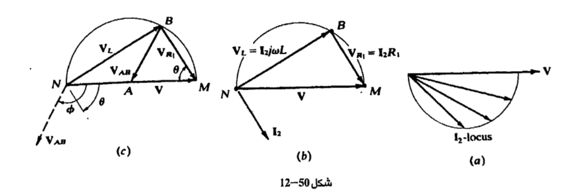
فى الفرع 1 يمر التيار I_1 خلال مقاومتين متساويتين R . وبذلك تكون A هى نقطة المنتصف للمتجه V كما هو مبين شكل 49-12 .



شكل 12-49

الفرع 2 له محل هندسى نصف دائرى Y [انظر شكل (c)12-28] وبالتالى فإن المحل الهندسى للتيار يكون نصف دائرى كما هو مبين شكل (a)12-50 . ويتكون شكل متجهات الجهد شكل (b)12-50 من الجهد على طرفى الملف V_{BN} والجهد على طرفى R_1 ، V_{MB} ويضاف الجهدا إتجاهياً .

$$V = V_{MN} = V_{BN} + V_{MB}$$



شكل 50–12

ولأن I_2 يتأخر عن V_{BN} 90° فإن V_{BN} ، V_{MB} تكونان متعامدتان لجميع قيم L كما فى شكل 12-56(b) وكلما تغيرت L من O إلى ∞ فإن النقطة B تتحرك من N إلى M على نصف الدائرة وشكلا 12-29 ، 12-50(b) مركبان على بعضهما فى شكل 12-50(c) . ومن الواضح أن V_{AB} هى نصف نصف قطر الدائرة وبذلك :

$$|V_{AB}| = \frac{1}{2}|V|$$

وبالإضافة إلى ذلك فإن الزاوية Φ والتى بها يتأخر V_{AB} عن V تساوى 2θ حيث $\theta = \tan^{-1}\omega L/R$.

مسائل إضافية

12.22 دائرة إمرار مرتفع RL بها $R_1 = 50\ k\Omega$ ، $L_2 = 0.2\ mH$. أوجد ω إذا كانت قيمة دالة تحويل هى $|H_{\upsilon\infty}| = 0.90$ ، (ب) $R = 1\ M\Omega$ على طرفى L_2 . أوجد $|H_\upsilon|$ عند $\omega = 7.5 \times 10^8$ rad/s

(*b*) With a load $R = 1\ M\Omega$ across L_2, find $|H_\upsilon|$ at $\omega = 7.5 \times 10^8$ rad/s.

الجواب : (*a*) 5.16×10^8 rad/s; (*b*) 0.908

12.23 أوجد $H_{\upsilon\infty}$ لدائرة إمرار مرتفع RL عند $\omega = 2.5\omega_s$ ، $R = 2\ k\Omega$ ، $L = 0.05$ H .

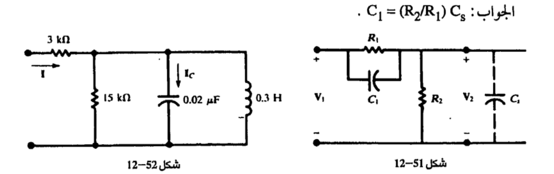
الجواب : 0.928 L21.80°

12.24 دائـرة إمـرار منخفض RC فى حالـة عـدم الحمل فيها $R_1 = 5\ k\Omega$. (أ) أوجد C_2 إذا كان $|H_v| = 0.5$ عند 10 kHz ، (ب) أوجـد H_v عند 5 kHz ، (جـ) ما هى قيمة C_2 الناتجة إذا كان $|H_v| = 0.9$ عند 8kHz (د) وأوجد قيمة جديدة للمقاومة R_1 لينتج $|H_v| = 0.90$ عند 8 kHz إذا كان C_2 كما فى (أ) .

الجواب: (*a*) 5.51 μF; (*b*) $0.756\angle -40.89^\circ$; (*c*) 1.93 μF; (*d*) 1749 Ω

12.25 مقسم جهد بسيط مكون من R_1 ، R_2 . وفى وجود سعة شاردة C_s فإن المقسم سيعتمد على التردد . بين أن قيمة V_2/V_1 لا تعتمد على التردد فى الدائرة شكل 51-12 إذا كان مكثف التعويض C_1 له قيمة معينة .

الجواب: $C_1 = (R_2/R_1)\,C_s$.



شكل 52-12

شكل 51-12

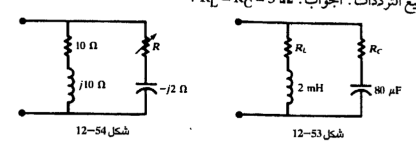
12.26 افترض أن جهداً جيبياً لمنبع ذو تردد متغير والجهد $V_{max} = 50$ V تم توصيله للدائرة المبينة شكل 52-12 . (أ) عند أى تردد f يكون |I| قيمة صغرى . (ب) أحسب هذه القيمة الصغرى للتيار . (جـ) ما هى قيمة $|I_C|$ عند هذا التردد؟

الجواب: (أ) 2.05 kHz ، (ب) 2.78 mA ، (جـ) 10.8 mA

12.27 وصل مكثف 20 μF على التوازى مع ملف عملى ممثلا بالقيم $L = 1$ mH ، على التوالى مع $R = 7\ \Omega$ أوجد تردد الرنين بوحدات rad/s وبوحدات Hz لدائرة التوازى .

الجواب: 1000 rad/s ، 159.2 Hz

12.28 ما هى العلاقة بين قيمتى R_L ، R_C إذا كانت الشبكة المبينة فى شكل 53-12 فى حالة رنين عند جميع الترددات . الجواب: $R_L = R_C = 5\ \Omega$.

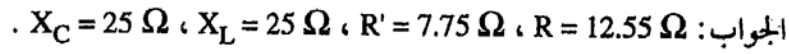


شكل 54–12

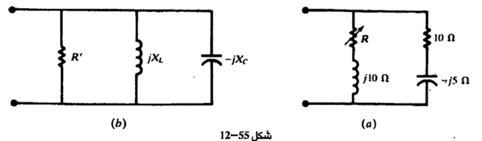
شكل 53–12

12.29 لشبكة التوازى المبينة شكل 54-12 (أ) أوجد قيم R عند الرنين، (ب) حول الفرع RC لمكافئ التوازى . الجواب: (أ) $6.0\ \Omega$ ، (ب) $X_{Cp} = 20\ \Omega$ ، $R_p = 6.67\ \Omega$.

12.30 للشبكة المبينة فى شكل 12-55(a) أوجد قيم R فى حالة الرنين . أوجد قيم R' ، X_L ، X_C فى دائرة التوازى المكافئة لشكل 12-55(b) .

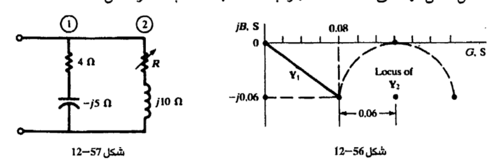


الجواب: $R = 12.55\ \Omega$ ، $R' = 7.75\ \Omega$ ، $X_L = 25\ \Omega$ ، $X_C = 25\ \Omega$.



شكل 55–12

12.31 الفرع 1 لدائرة توازى ذات فرعين له المعاوقة $Z_1 = 8 + j6\ \Omega$ عند $\omega = 5000$ rad/s والفرع 2 يحتوى على $R = 8.34\ \Omega$ على التوالى مع مكثف متغير C (أ) أوجد C عند الرنين (ب) ارسم شكل المحل الهندسى للمساحة . الجواب: (أ) $24\ \mu F$ ، (ب) انظر شكل 56-12 .

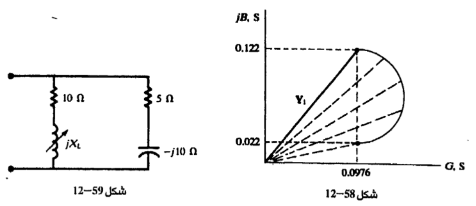


شكل 57–12

شكل 56–12

12.32 أوجد قيم R فى حالة الرنين للشبكة المبينة شكل 57-12 . ارسم المحل الهندسى للمسامحة .

الجواب : لا يمكن الحصول على الرنين بتغيير قيمة R . انظر شكل 58-12 .



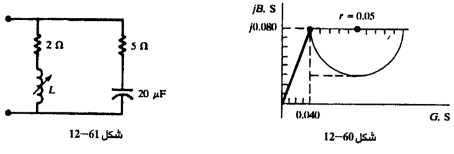
شكل 59—12

شكل 58—12

12.33 فى المسألة 32-12 لأى قيمة للمانعة الحثية يمكن بها الحصول على الرنين عند قيمة أو أخرى للمقاومة المتغيرة R . الجواب : $X_L \leq 8.2\ \Omega$.

12.34 (أ) إنشأ شكل المحل الهندسى للمسامحة للدائرة المبينة شكل 59-12 . (ب) عند أى قيمة للمقاومة فى الفرع RL يمكن الحصول على الرنين لقيمة واحدة فقط للمتغير X_L ؟

الجواب : (أ) انظر شكل 60-12 . (ب) $6.25\ \Omega$.



شكل 61—12

شكل 60—12

12.35 أوجد قيمة (أو قيم) L التى تكون فيها الدائرة شكل 61-12 فى حالة رنين عند 5000 rad/s .

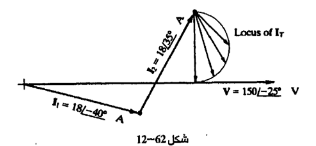
الجواب : 66.0 μH ، 2.43 mH .

12.36 دائرة توازى ذات ثلاث أفرع بها عناصر ثابتة فى فرعين وفى الفرع الثالث أحد العناصر متغيراً . وكان شكل متجهات الجهد/ التيار كما هو مبين شكل 62-12 . حدد جميع العناصر إذا كان $\omega = 5000$ rad/s .

الجواب : الفرع 1 : $L = 0.431$ mH ، $R = 8.05\ \Omega$.

الفرع 2 : $C = 27.7\ \mu F$ ، $R = 4.16\ \Omega$.

الفرع 3 : R متغيرة ، $L = 2.74$ mH .



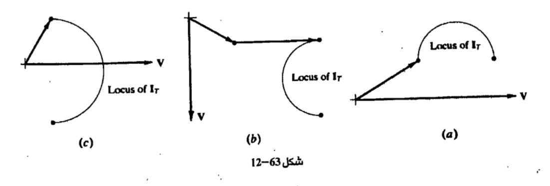
شكل 62–12

12.37 اشرح الدائرة المناسبة لكل محل هندسى مبين فى شكل 63-12 إذا كان بكل دائرة عنصر واحد متغير .

الجواب : (أ) دائرة ذات فرعين توازى . الفرع R:1 ثابتة ، X_C ثابتة . الفرع R:2 ثابتة ، X_C متغيرة .

(ب) دائرة ذات ثلاث أفرع توازى . الفرع R:1 ثابتة ، X_C ثابتة . الفرع X:2 ثابتة ، الفرع R:3 ثابتة ، X_L متغيرة .

(جـ) دائرة تحتوى على فرعين توازى . الفرع R:1 ثابتة ، X_C ثابتة الفرع 2 ، X_L ثابتة ، R متغيرة .



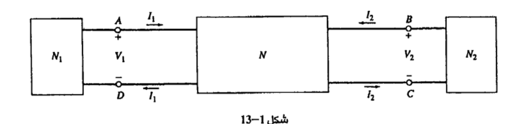
شكل 63–12

الفصل الثالث عشر

الشبكات ذات المدخلين

13.1 الأطـراف والمداخـل

فى الشبكة ذات الطرفين يرتبط جهد الطرف مع تيار الطرف بالمعاوقة $Z = V/I$ وفى الشبكة ذات الأربعة أطراف إذا كان كل زوج منها (أو مدخل) متصل بمفرده إلى دائرة أخرى كما فى شكل 1-13 فإن المتغيرات الأربعة i_1 ، i_2 ، υ_1 ، υ_2 ترتبط ببعضها بمعادلتين تسمى خواص الأطراف. ومن معادلتى الشبكتين ومعادلتى خواص الأطراف نحصل على العدد الكافى من المعادلات اللازمة للحصول على المتغيرات الأربعة.



شكل 1−13

13.2 معامـلات Z

يمكن كتابة معادلات خواص الأطراف للشبكة ذات المدخلين والتى تحتوى على العناصر الخطية والمنابع المطلقة فى مجال s كالتالى :

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

والعوامل Z_{ij} لها تميز المعاوقة وتسمى معاملات Z للشبكة . وتسمى أيضاً معاملات معاوقة الدائرة المفتوحة حيث أنها تقاس عند أحد الأطراف بينما يكون الطرف الآخر مفتوحاً . وهى كالتالى :

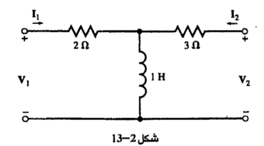
$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad (2)$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

مثـــال 13.1 : أوجد معاملات Z للدائرة ذات المدخلين فى شكل 13-2 .



شكل 13–2

استخدم KVL حول الحلقتين فى شكل 13-2 بتيارى حلقة I_1 ، I_2 للحصول على :

$$V_1 = 2I_1 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + sI_2$$

$$V_2 = 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2 \qquad (3)$$

يمكن إيجاد معاملات Z للدائرة بمقارنة (1) ، (3) .

$$Z_{11} = s + 2$$

$$Z_{12} = z_{21} = s \qquad (4)$$

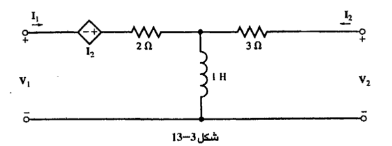
$$Z_{22} = s + 3$$

لاحظ أنه فى هذا المثال $Z_{12} = Z_{21}$.

الشبكات القابلة للعكس والغير قابلة للعكس :

تسمى الشبكة ذات الدخلين بأنها قابلة للعكس إذا كانت معاوقات التحويل للدائرة المفتوحة متساوية $Z_{12} = Z_{21}$. وبالتالى فإنه فى دائرة المدخلين القابلة للعكس مع وجود التيار I يغذى أحد المدخلين فإن جهد الدائرة المفتوحة المقاس فى المدخل الآخر سيكون هو نفسه بغض النظر عن أى المدخلين يقاس وبالتالى فإن الجهد يكون مساوياً للقيمة $V = Z_{12}I = Z_{21}I$. وتكون الشبكات التى تحتوى على المقاومات والملفات والمكثفات غالباً قابلة للعكس أما الشبكات التى تحتوى على منابع تابعة بالإضافة لما سبق تكون غالباً غير قابلة للعكس (انظر مثال 2-13).

مثـــــال 13.2 : الدائرة ذات المدخلين المبينة شكل 3-13 تحتوى على منبع جهد ذو تيار تابع . أوجد معاملات Z لها .



شكل 3-13

كما فى مثال 1-13 نستخدم KVL حول الحلقتين .

$$V_1 = 2I_1 - I_2 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + (s - 1)I_2$$

$$V_2 = 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2$$

معاملات Z هى :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= s + 2 \\ Z_{12} &= s - 1 \\ Z_{21} &= s \\ Z_{22} &= s + 3 \end{aligned} \qquad (5)$$

ومع وجـود المنبع التـابع فى الـدائرة $Z_{21} \neq Z_{12}$ وبالتـالى فـإن الدائرة ذات المدخلين لا تكون معكوسة .

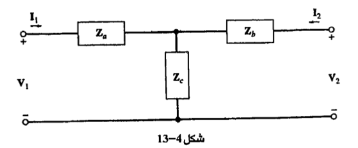
13.3 مكافئ T للشبكات المعكوسة

يمكن تمثيل الشبكة المعكوسة بمكافئ T لها كما هو مبين فى الدائرة شكل 13-4 . Z_a ، Z_b ، Z_C يمكن الحصول عليها من معاملات Z كالتالى :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_a &= \mathbf{Z}_{11} - \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_b &= \mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{21} \\ \mathbf{Z}_c &= \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} \end{aligned} \qquad (6)$$

ليس من الضرورى تحقيق مكافئ T للشبكة .

مثـــال 13.3 : أوجد معاملات Z لشكل 13-4 .



شكل 13-4

مرة أخرى بتطبيق KVL للحصول على :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{Z}_a\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_c(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_c)\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_c\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{Z}_b\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_c(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{Z}_c\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c)\mathbf{I}_2 \end{aligned} \qquad (7)$$

يمكن إيجاد معاملات Z بمقارنة (1) ، (7) .

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11} &= \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{Z}_{12} &= \mathbf{Z}_{21} = \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{Z}_{22} &= \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c \end{aligned}$$

13.4 معاملات Y

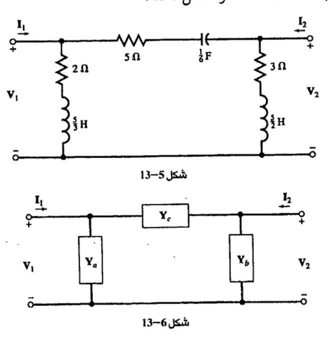
يمكن أيضاً كتابة خواص الأطراف كما فى (9) حيث نعبر عن I_1 ، I_2 بدلالة كلا من V_1 ، V_2 .

$$
\begin{aligned}
I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\
I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

تميز المعاملات Y_{ij} مثل المسامحة وهى تسمى معاملات Y أو معاملات مسامحة الدائرة القصيرة لأنها تقاس عند أحد الدخلين بينما يكون الدخل الآخر مقصوراً .

$$
\begin{aligned}
Y_{11} &= \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \\
Y_{12} &= \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \\
Y_{21} &= \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \\
Y_{22} &= \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

مثـــال 13.4 : أوجد معاملات Y لدائرة شكل 13-5 .



شكل 13-5

شكل 13-6

نستخدم KCL لعقدتى الدخل والخرج (للتوضيح نعبر عن المسامحات للثلاث أفرع بالدائرة Y_a ، Y_b ، Y_c كما هو مبين شكل 13-6 ولذلك :

$$Y_a = \frac{1}{2 + 5s/3} = \frac{3}{5s + 6}$$
$$Y_b = \frac{1}{3 + 5s/2} = \frac{2}{5s + 6} \qquad (11)$$
$$Y_c = \frac{1}{5 + 6/s} = \frac{s}{5s + 6}$$

معادلتا العقدة هما :

$$I_1 = V_1 Y_a + (V_1 - V_2) Y_c = (Y_a + Y_c) V_1 - Y_c V_2$$
$$I_2 = V_2 Y_b + (V_2 - V_1) Y_c = -Y_c V_1 + (Y_b + Y_c) V_2 \qquad (12)$$

بمقارنة (9) مع (12) نحصل على :

$$Y_{11} = Y_a + Y_c$$
$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_c \qquad (13)$$
$$Y_{22} = Y_b + Y_c$$

بالتعويض بقيم Y_a ، Y_b ، Y_c من معادلة (11) فى (13) نحصل على :

$$Y_{11} = \frac{s + 3}{5s + 6}$$
$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-s}{5s + 6} \qquad (14)$$
$$Y_{22} = \frac{s + 2}{5s + 6}$$

وحيث أن $Y_{12} = Y_{21}$ فإن الدائرة ذات المدخلين تكون قابلة للعكس .

13.5 مكافئ π للشبكات القابلة للعكس

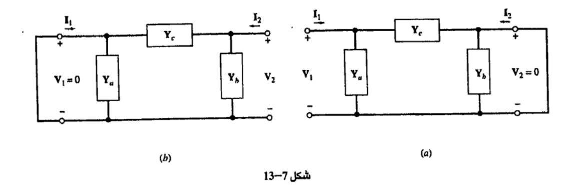
يمكن تمثيل الشبكة القابلة للعكس بمكافىء π لها كما هو مبين شكل 6-13 وبالعناصر الثلاثة لشبكة π المكافئة يمكن إيجادها بالحل العكسى. فنوجد أولاً معاملات Y لشكل 6-13 ومن (10) نحصل على:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11} &= \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c && \text{[Fig. 13.7(a)]} \\ \mathbf{Y}_{12} &= -\mathbf{Y}_c && \text{[Fig. 13-7(b)]} \\ \mathbf{Y}_{21} &= -\mathbf{Y}_c && \text{[Fig. 13-7(a)]} \\ \mathbf{Y}_{22} &= \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c && \text{[Fig. 13-7(b)]} \end{aligned} \qquad (15)$$

والتى منها

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12} \qquad \mathbf{Y}_b = \mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}_{12} \qquad \mathbf{Y}_c = -\mathbf{Y}_{12} = -\mathbf{Y}_{21} \qquad (16)$$

ليس من الضرورى تحقيق مكافىء π للشبكة.



شكل 7–13

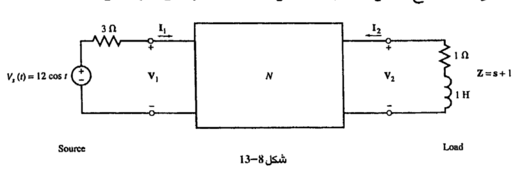
13.6 تطبيقات على خواص الأطراف

ترتبط المتغيرات الأربعة I_1 ، I_2 ، V_1 ، V_2 ببعضها فى شبكة الدخلين بالمعادلتين (1)، (9). ويمكن الحصول على معادلتين إضافيتين بتوصيل الدائرة ذات الدخلين للخارج كما فى شكل 1-13 بالتالى فإنه يمكن الحصول على I_1 ، I_2 ، V_1 ، V_2 من المعادلات الأربعة بدون أى معلومات عن التركيب الداخلى للدائرة.

مثـــــال 13.5 : معاملات Z للشبكة ذات الدخلين هى :

$$Z_{11} = 2s + 1/s \qquad Z_{12} = Z_{21} = 2s \qquad Z_{22} = 2s + 4$$

تتصل الشبكة بمنبع وحمل كما هو مبين شكل 13-8 . أوجد I_1 ، I_2 ، V_1 ، V_2 .



شكل 13-8

خواص الأطراف تعطى بالتالى :

$$\begin{aligned} V_1 &= (2s + 1/s)I_1 + 2sI_2 \\ V_2 &= 2sI_1 + (2s + 4)I_1 \end{aligned} \qquad (17)$$

التمثيل الإتجاهى للجهد $\upsilon(t)$ هو $V_s = 12$ V مع $s = j$. من KVL حول حلقتى الدخل والخرج نحصل على معادلتين إضافيتين (18) .

$$\begin{aligned} V_s &= 3I_1 + V_1 \\ 0 &= (1 + s)I_2 + V_2 \end{aligned} \qquad (18)$$

بتعويض $s = j$ ، $V_s = 12$ V فى (17) وفى (18) :

$$V_1 = jI_1 + 2jI_2$$

$$V_2 = 2jI_1 + (4 + 2j)I_2$$

$$12 = 3I_1 + V_1$$

$$0 = (1 + j)I_2 + V_2$$

والتى منها

$$I_1 = 3.29\angle{-10.2^\circ} \qquad I_2 = 1.13\angle{-131.2^\circ}$$

$$V_1 = 2.88\angle{37.5^\circ} \qquad V_2 = 1.6\angle{93.8^\circ}$$

13.7 التحويل بين معاملات Z ومعاملات Y

يمكن الحصول على معاملات Y من معاملات Z بحل (1) لقيم I_1 ، I_2 وبتطبيق قانون كرامر للمعادلة (1) نحصل على:

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{D_{ZZ}} V_1 - \frac{Z_{12}}{D_{ZZ}} V_2$$
$$I_2 = \frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} V_1 + \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}} V_2 \qquad (19)$$

حيث $D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ هو محور المعاملات فى (1) وبمقارنة (19) مع (9) نحصل على:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{ZZ}}$$
$$Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}}$$
$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} \qquad (20)$$
$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}}$$

ولكى يتحقق وجود معاملات Z المكافئة لمعاملات Y فإن المحدد D_{ZZ} يجب ألا يكون صفراً.

ومن جهة أخرى بمعرفة معاملات Y فإن معاملات Z هى:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{D_{YY}}$$
$$Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{D_{YY}}$$
$$Z_{21} = \frac{-Y_{21}}{D_{YY}} \qquad (21)$$
$$Z_{22} = \frac{Y_{11}}{D_{YY}}$$

حيث $D_{YY} = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ هى محدد المعاملات فى (9). وللحصول على معاملات Z للدائرة ذات الدخلين من معاملات Y فإن D_{YY} يجب ألا تكون صفراً.

مثـــال 13.6 بالرجوع لمثال 13-4 أوجد معاملات Z للدائرة شكل 13-5 من معاملات Y لها.

وجد أن معاملات Y للدائرة كالتالى [انظر (14)].

$$Y_{11} = \frac{s+3}{5s+6} \qquad Y_{12} = Y_{21} = \frac{-s}{5s+6} \qquad Y_{22} = \frac{s+2}{5s+6}$$

بالتعويض فى (21) حيث $D_{YY} = 1 / (5S + 6)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= s+2 \\ Z_{12} &= Z_{21} = s \\ Z_{22} &= s+3 \end{aligned} \qquad (22)$$

معاملات Z فى (22) مطابقة لمعاملات Z للدائرة شكل 13-2. وبذلك تكون الدائرتان متكافئتين من وجهة نظر الأطراف. وكان ذلك من التصميم. شكل 13-2 هو مكافئ T لشكل 13-5. ويمكن تحقيق التكافؤ بين شكل 13-2، 13-5 مباشرة بتطبيق (6) لمعاملات Z المعطاه فى (22) للحصول على مكافئ الشبكة T لها.

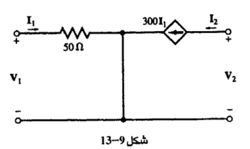
13.8 معامـلات h (هجـين)

من الأفضل فى بعض الدوائر ذات الدخلين أو النبائط الالكترونية التعبير عنها بمعادلتى الأطراف التالية:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \qquad (23)$$

حيث h_{ij} معاملات تسمى معاملات h أو معاملات هجين.

مثـــال 13.7 : أوجد معاملات h لشكل 13-9.



شكل 9–13

وهذا هو التمثيل المبسط لوصلة الترانزستور ثنائى القطبية فى مجال تشغيلها الخطى . ومن الشكل فإن خواص الأطراف تكون :

$$V_1 = 50I_1 \qquad \text{and} \qquad I_2 = 300I_1 \tag{24}$$

بمقارنة (24) ، (23) نحصل على (25) .

$$h_{11} = 50 \qquad h_{12} = 0 \qquad h_{21} = 300 \qquad h_{22} = 0 \tag{25}$$

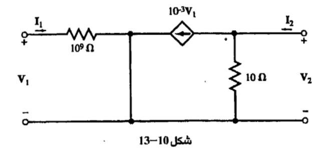
13.9 معامـــلات g

يمكن أيضاً تمثيل معادلتى الخواص للدائرة ذات الدخلين بصورة أخرى من معاملات هجين كما هو فى (26) .

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned} \tag{26}$$

حيث معاملات g_{ij} تسمى معكوس هجين أو معاملات g .

مثـــال 13.8 أوجد معاملات g للدائرة المبينة شكل 10-13 .



شكل 10–13

وهذا هو التمثيل المبسط للترانزستور ذو الأثر المجالى فى مجال التشغيل الخطى. وللحصول على معاملات g نستنتج أولاً معادلات الأطراف بتطبيق قانونى كيرشيف عند الأطراف.

عند طرفى الدخل $V_1 = 10^9 I_1$

عند طرف الخرج $V_2 = 10 (I_2 - 10^{-3} V_1)$

أو

$$I_1 = 10^{-9} V_1 \qquad \text{and} \qquad V_2 = 10 I_2 - 10^{-2} V_1 \qquad (27)$$

بمقارنة (27) ، (26) نحصل على :

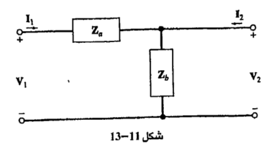
$$g_{11} = 10^{-9} \qquad g_{12} = 0 \qquad g_{21} = -10^{-2} \qquad g_{22} = 10 \qquad (28)$$

13.10 معامــلات النقــــل

معاملات النقل A ، B ، C ، D تعبر عن متغيرات الدخل V_1 ، I_1 بدلالة متغيرات الطرف البعيد V_2 ، I_2 وهى تسمى ABCD أو معاملات T وتعرف بالمعادلتين :

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned} \qquad (29)$$

مثــــال 13.9 : أوجد معاملات T لشكل 13-11 حيث كلا من Z_a ، Z_b ليس صفراً.



شكل 11−13

وهذا هو التمثيل المجمع لجزء صغير جداً من خط النقل. ومن (29) نحصل على :

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b} = 1 + Z_a Y_b$$

$$B = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = Z_a$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = Y_b \qquad (30)$$

$$D = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = 1$$

13.11 توصيل شبكتين ذات مدخلين معاً

يمكن توصيل الشبكتين ذات الدخلين معاً بأشكال عامة متعددة قبل توصيلها على التوالى أو على التوازى أو بالتتابع بحيث تنشأ شبكة جهد جديدة ذات مدخلين . ولكل من هذه الأشكال مجموعة من المعاملات المحددة يمكن أن تكون مفيدة عن الأخرى كوصف الشبكة .

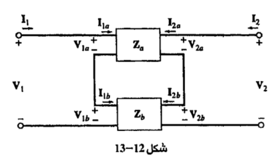
توصيلة التوالى :

يبين شكل 12-13 توصيلة التوالى لشبكتين كل منهما ذات مدخلين وهما a ، b . لكل منهما معاملات معاوقة الدائرة المفتوحة Z_a ، Z_b على الترتيب . ونستعمل فى هذا الشكل العام معاملات Z حيث أنهما مرتبطان ببعضهما كتوصيلة توالى لمجموعتين من المعاوقات . ومعاملات Z لتوصيلة التوالى هى (انظر مسألة 10-13) .

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_{11,a} + Z_{11,b} \\ Z_{12} &= Z_{12,a} + Z_{12,b} \\ Z_{21} &= Z_{21,a} + Z_{21,b} \\ Z_{22} &= Z_{22,a} + Z_{22,b} \end{aligned} \qquad (31a)$$

أو على شكل مصفوفة .

$$[Z] = [Z_a] + [Z_b] \qquad (31b)$$



شكل 12–13

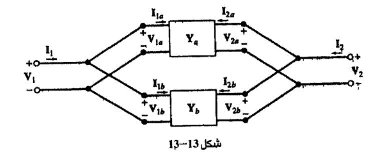
توصيلة التوازى

يبين شكل 13-13 توصيلة التوازى للشبكتين a ، b ذات المدخلين مع معاملات مسامحات الدائرة القصيرة Y_a ، Y_b . فى هذه الحالة فإن معاملات Y تكون أكثر مناسبة فى هذه الحالة . ومعاملات Y بتوصيلة التوازى هى (انظر مسألة 11-13) .

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11} &= \mathbf{Y}_{11,a} + \mathbf{Y}_{11,b} \\ \mathbf{Y}_{12} &= \mathbf{Y}_{12,a} + \mathbf{Y}_{12,b} \\ \mathbf{Y}_{21} &= \mathbf{Y}_{21,a} + \mathbf{Y}_{21,b} \\ \mathbf{Y}_{22} &= \mathbf{Y}_{22,a} + \mathbf{Y}_{22,b} \end{aligned} \tag{32a}$$

أو بصورة المصفوفة .

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}_a] + [\mathbf{Y}_b] \tag{32b}$$



شكل 13–13

توصيلة التتابع

توصيلة التتابع لشبكتين ذات مدخلين a ، b مبينة فى شكل 14-13 وفى هذه الحالة يكون من المناسب استخدام معاملات T. ومعاملات T لتوصيلة التتابع هى :

$$
\begin{aligned}
A &= A_a A_b + B_a C_b \\
B &= A_a B_b + B_a D_b \\
C &= C_a A_b + D_a C_b \\
D &= C_a B_b + D_a D_b
\end{aligned}
\qquad (33a)
$$

أو بصورة المصفوفة .

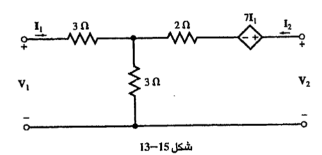
$$[T] = [T_a][T_b] \qquad (33b)$$

شكل 14–13

13.12 اختيار نوع المعامل

ما هو نوع المعامل الذى يكون مناسباً ويعطى أفضل وصف لشبكة ذات مدخلين أو نبيطة؟ توجد عدة عوامل تؤثر فى اختيار المعاملات . (1) من الممكن أن تكون بعض المعاملات غير متاحة مطلقاً وبالتالى لا يمكن تعريفها (انظر مثال 10-13) . (2) هناك بعض المعاملات يكون من المناسب استخدامها حينما تتصل الشبكة بشبكة أخرى كما هو مبين فى بند 11-13 . وفى هذه الأثناء بتحويل الشبكة ذات المدخلين إلى شكل T أو π المكافئ لها ثم نستخدم التحليل المعتاد مثل اختصار العناصر وتقسيم التيار فإننا فى هذه الحالة نكون قد قمنا بخفض العناصر وتبسيط الدائرة الكلية . (3) فى بعض الشبكات أو النبائط فإنه باستخدام معاملات خاصة قد تؤدى إلى تحسين الحسابات لتكون أكثر دقة وأحسن حساسية عند استخدامها فى الدائرة المركبة .

مثـــال 13.10 : أوجد معاملات Z ومعاملات Y لشكل 16-13 .



شكل 15–13

نستخدم KVL لحلقتى الدخل والخرج ولذلك :

حلقة الدخل : $V_1 = 3I_1 + 3\,(I_1 + I_2)$.

حلقة الخرج : $V_2 = 7I_1 + 2I_2 + 3\,(I_1 + I_2)$.

أو

$$V_1 = 6I_1 + 3I_2 \quad \text{and} \quad V_2 = 10I_1 + 5I_2 \qquad (34)$$

بمقارنة (34) ، (2) نحصل على :

$$Z_{11} = 6 \qquad Z_{12} = 3 \qquad Z_{21} = 10 \qquad Z_{22} = 5$$

معاملات Y مع هذا ليست معرفة حيث أن استخدام الطريقة المباشرة للعلاقات (10) أو للتحويل من معاملات Z (19) ينتج $D_{ZZ} = 6(5) - 3(10) = 0$.

13.13 ملخص معاملات الأطراف والتحويلات

تعرف معاملات الأطراف بالمعادلات التالية :

معاملات Z

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$
$$[V] = [Z][I]$$

معاملات h

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

معاملات T

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$
$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

معاملات Y

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$
$$[I] = [Y][V]$$

معاملات g

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$
$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

يلخص جدول 13-1 التحويلا بين المعاملات Z ، Y ، h ، g ، T ولكى تكون التحويلات ممكنة فإن المحدد الخاص بمعاملات المنبع يجب ألا يكون صفراً .

جـــدول 13-1

	Z		Y		h		g		T	
Z	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{D_{YY}}$	$\frac{-Y_{12}}{D_{YY}}$	$\frac{D_{hh}}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{-g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{D_{TT}}{C}$
	Z_{21}	Z_{22}	$\frac{-Y_{21}}{D_{YY}}$	$\frac{Y_{11}}{D_{YY}}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$
Y	$\frac{Z_{22}}{D_{ZZ}}$	$\frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}}$	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$\frac{-D_{TT}}{B}$
	$\frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}}$	$\frac{Z_{11}}{D_{ZZ}}$	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{-D_{hh}}{h_{11}}$	$\frac{-g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$\frac{-1}{B}$	$\frac{A}{B}$
h	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{D_{gg}}$	$\frac{g_{12}}{D_{gg}}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{D_{TT}}{D}$
	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{Y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{g_{21}}{D_{gg}}$	$\frac{g_{11}}{D_{gg}}$	$\frac{-1}{D}$	$\frac{C}{D}$
g	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{D_{hh}}$	$\frac{-h_{12}}{D_{hh}}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$\frac{-D_{TT}}{A}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{11}}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{-h_{21}}{D_{hh}}$	$\frac{h_{11}}{D_{hh}}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
T	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	$\frac{-D_{hh}}{h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-D_{YY}}{Y_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{21}}$	C	D

$D_{PP} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$ is the determinant of Z-, Y-, h-, g- or T-parameters.

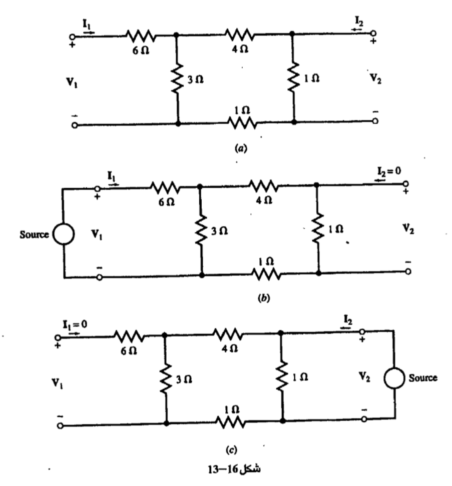
مسائل محلولة

13.1 أوجد معاملات Z للدائرة شكل 13-16(a) .

يمكن الحصول على Z_{11} ، Z_{21} بتوصيل منبع للمدخل ≠ وترك المدخل ≠ 2 مفتوحاً [شكل 13-16(b)] . وينتج من توصيلات التوالى والتوازى .

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0} = 8 \qquad \text{and} \qquad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{3}$$

وبالمثل يمكن الحصول على Z_{22} ، Z_{12} بتوصيل منبع لمدخل ≠ 2 وترك المدخل ≠ 1 مفتوحاً [شكل 13-16(c)] .



شكل 13—16

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0} = \frac{8}{9} \qquad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\bigg|_{I_1=0} = \frac{1}{3}$$

الدائرة قابلة للعكس حيث أن $Z_{21} = Z_{12}$.

13.2 معاملات Z للشبكة ذات المدخلين N هى :

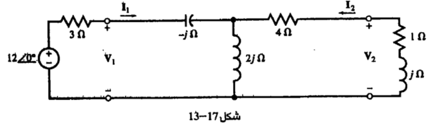
$$Z_{11} = 2s + 1/s \qquad Z_{12} = Z_{21} = 2s \qquad Z_{22} = 2s + 4$$

(أ) أوجد المكافئ T للشبكة N . (ب) وصلت الشبكة N لمنبع وحمل كما هو مبين فى الدائرة شكل 13-8 . استبدل الشبكة N بالمكافئ T لها ثم حل المسألة لإيجاد i_1 ، i_2 ، v_1 ، v_2 .

(أ) الثلاث أفرع لمكافئ T للشبكة (شكل 13-4) هى :

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 2s + \frac{1}{s} - 2s = \frac{1}{s}$$
$$Z_b = Z_{22} - Z_{12} = 2s + 4 - 2s = 4$$
$$Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 2s$$

(ب) مكافئ T للشبكة N مع توصيلات الدخل والخرج مبين فى مجال المتجهات فى شكل 13-17 .

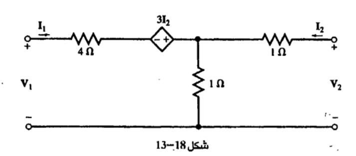


شكل 13-17

باستخدام طريقة التحليل المعتاد والتى تشمل خفض العناصر وتوزيع التيار وذلك لشكل 13-17 نجد i_1 ، i_2 ، v_1 ، v_2 .

فى مجال المتجهات	فى مجال الزمن
$i_1 = 3.29 \cos(t - 10.2°)$	$I_1 = 3.29\underline{/-10.2°}$
$i_2 = 1.13 \cos(t - 131.2°)$	$I_2 = 1.13\underline{/-131.2°}$
$v_1 = 2.88 \cos(t + 37.5°)$	$V_1 = 2.88\underline{/37.5°}$
$v_2 = 1.6 \cos(t + 93.8°)$	$V_2 = 1.6\underline{/93.8°}$

13.3 أوجد معاملات Z للشبكة ذات المدخلين فى شكل 18-13 .



شكل 18-13

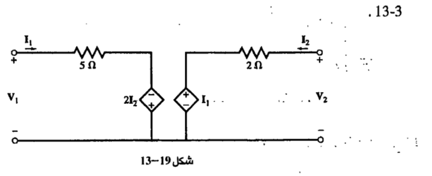
باستخدام KVL عند طرفى الدخل والخرج نحصل على التالى :

طرفى الدخل $V_1 = 4I_1 + 3I_2 + (I_1 + I_2) = 5I_1 - 2I_2$.

طرفى الخرج $V_2 = I_2 + (I_1 + I_2) = I_1 + 2I_2$.

وباستخدام معادلة (2) فإن $Z_{11} = 5, Z_{12} = -2, Z_{21} = 1, Z_{22} = 2$.

13.4 أوجد معاملات Z للشبكة ذات المدخلين فى شكل 19-13 وقارن نتائج مع تلك فى المسألة 3-13 .



شكل 19-13

قانون KVL يعطى :

$$V_1 = 5I_1 - 2I_2 \qquad \text{and} \qquad V_2 = I_1 + 2I_2$$

المعادلات السابقة مطابقة لخواص الأطراف التى حصلنا عليها فى شبكة شكل 18-13 وبذلك تكون الشبكتان متكافئتان .

13.5 أوجد معاملات Y لشكل 13-19 مستخدماً معاملات Z لها .

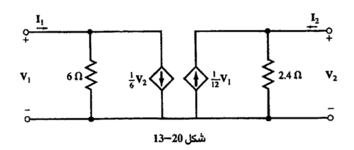
من المسألة 13-4 .

$$Z_{11} = 5,\ Z_{12} = -2,\ Z_{21} = 1,\ Z_{22} = 2$$

Since $D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = (5)(2) - (-2)(1) = 12,$

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{ZZ}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} = \frac{-1}{12} \qquad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}} = \frac{5}{12}$$

13.6 أوجد معاملات Y للشبكتين ذات الدخلين فى شكل 13-20 وبالتالى بين أن الشبكتين شكلى 13-19 ، 13-20 متكافئتان .



شكل 13-20

بتطبيق KCL عند المداخل للحصول على خواص الأطراف ومعاملات Y وبالتالى :

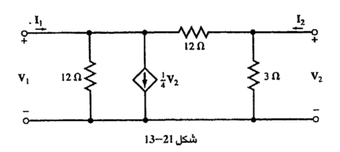
طرفى الدخل : $$I_1 = \frac{V_1}{6} + \frac{V_2}{6}$$

طرفى الخرج : $$I_2 = \frac{V_2}{2.4} - \frac{V_1}{12}$$

و $$Y_{11} = \frac{1}{6} \qquad Y_{12} = \frac{1}{6} \qquad Y_{21} = \frac{-1}{12} \qquad Y_{22} = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$$

وهى مطابقة لمعاملات Y التى حصلنا عليها فى المسألة 13-5 شكل 13-19 وبالتالى فإن الشبكتين متكافئتان .

13.7 استخدام معادلات الدائرة القصيرة (10) لإيجاد معاملات Y للشبكة ذات المدخلين فى شكل 13-21 .



شكل 21–13

$$I_1 = Y_{11}V_1|_{V_2=0} = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)V_1 \qquad \text{or} \qquad Y_{11}=\frac{1}{6}$$

$$I_1 = Y_{12}V_2|_{V_1=0} = \frac{V_2}{4}-\frac{V_2}{12} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right]V_2 \qquad \text{or} \qquad Y_{12}=\frac{1}{6}$$

$$I_2Y_{21}V_1|_{V_2=0} = -\frac{V_1}{12} \qquad \text{or} \qquad Y_{21}=-\frac{1}{12}$$

$$I_2 = Y_{22}V_2|_{V_1=0} = \frac{V_2}{3}+\frac{V_2}{12} = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)V_2 \qquad \text{or} \qquad Y_{22}=\frac{5}{12}$$

13.8 استخدم KCL عند عقد الشبكة فى شكل 21-13 للحصول على خواص الأطراف ومعاملات Y . بين أن الشبكتين فى شكلى 18-13 ، 21-13 متكافئتان .

عقدة الدخل :
$$I_1 = \frac{V_1}{12}+\frac{V_1-V_2}{12}+\frac{V_2}{4}$$

عقدة الخرج :
$$I_2 = \frac{V_2}{3}+\frac{V_2-V_1}{12}$$

$$I_1 = \frac{1}{6}V_1+\frac{1}{6}V_2 \qquad I_2 = -\frac{1}{12}V_1+\frac{5}{12}V_2$$

معاملات Y التى ذكرت فى معادلات الخواص السابقة مطابقة لمعاملات Y للدوائر فى أشكال 18-13 ، 19-13 ، 20-13 وبالتالى فإن الأربع دوائر متكافئة .

13.9 إذا كانت معاملات Z للشبكة N ذات المدخلين فى شكل 13-22(a) هى $Z_{11} = 4s$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ ، $Z_{22} = 95$ (أ) استبدل N بمكافئ T لها . (ب) استخدم الجزء (أ) لإيجاد تيار الدخل i_1 للجهد $\upsilon_s = \cos 1000t$ (V) .

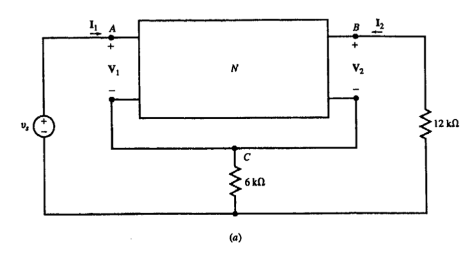
(أ) الشبكة قابلة للعكس وبالتالى فإن مكافئ T له وجود ويمكن إيجاد حدوده من (6) كما هو مبين فى الدائرة شكل 13-22(b) .

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_{11} - \mathbf{Z}_{12} = 4s - 3s = s$$
$$\mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{21} = 9s - 3s = 6s$$
$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = 3s$$

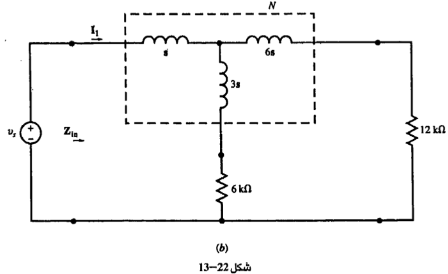
(ب) نكرر توصيل التوالى والتوازى لعناصر شكل 13-22(b) باعتبار المقاومات بوحدات kΩ ، s بوحدات k rad/s لإيجاد Z_{in} بوحدات kΩ كما هو مبين فيما بعد .

$$\mathbf{Z}_{in}(s) = \mathbf{V}_s/\mathbf{I}_1 = s + \frac{(3s+6)(6s+12)}{9s+18} = 3s + 4 \qquad \text{or} \qquad \mathbf{Z}_{in}(j) = 3j + 4 = 5\underline{/36.9^\circ} \quad \text{k}\Omega$$

and $i_1 = 0.2\cos(1000t - 36.9^\circ)$ (mA).



(a)



(b)

شكل 13–22

13.10 شبكتان ذات دخلين a ، b لها معاوقات الدائرة المفتوحة Z_a ، Z_b متصلتان على التوالى (انظر شكل 12-13) . استنتج معادلات معاملات Z (13-a) .

من الشبكة a نحصل على :

$$V_{1a} = Z_{11,a}I_{1a} + Z_{12,a}I_{2a}$$
$$V_{2a} = Z_{21,a}I_{1a} + Z_{22,a}I_{2a}$$

من الشبكة b :

$$V_{1b} = Z_{11,b}I_{1b} + Z_{12,b}I_{2b}$$
$$V_{2b} = Z_{21,b}I_{1b} + Z_{22,b}I_{2b}$$

من التوصيل بين a ، b نحصل على :

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \qquad V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$
$$I_2 = I_{2b} = I_{2b} \qquad V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

وبالتالى :

$$V_1 = (Z_{11,a} + Z_{11,b})I_1 + (Z_{12,a} + Z_{12,b})I_2$$
$$V_2 = (Z_{21,a} + Z_{21,b})I_1 + (Z_{22,a} + Z_{22,b})I_2$$

ومنها نستنتج معاملات Z (13a) .

13.11 للشبكتين a ، b ذات المدخلين لها مسامحات الدائرة القصيرة Y_a ، Y_b متصلتان على التوازى (انظر شكل 13-13) استنتج معادلات معاملات Y (32a) .

من الشبكة a نحصل على :

$$I_{1a} = Y_{11,a}V_{1a} + Y_{12,a}V_{2a}$$
$$I_{2a} = Y_{21,a}V_{1a} + Y_{22,a}V_{2a}$$

من الشبكة b نحصل على :

$$I_{1b} = Y_{11,b}V_{1b} + Y_{12,b}V_{2b}$$
$$I_{2b} = Y_{21,b}V_{1b} + Y_{22,b}V_{2b}$$

من التوصيل بين a ، b نحصل على :

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \qquad I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$

$$V_2 = V_{2b} = V_{2b} \qquad I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

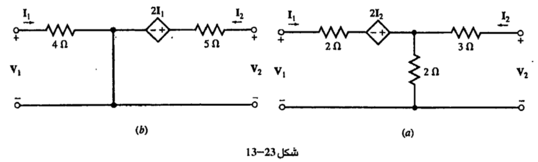
وبالتالى فإن :

$$I_1 = (Y_{11,a} + Y_{11,b})V_1 + (Y_{12,a} + Y_{12,b})V_2$$

$$I_2 = (Y_{21,a} + Y_{21,b})V_1 + (Y_{22,a} + Y_{22,b})V_2$$

والتى منها ينتج معاملات Y (32a) .

13.12 أوجد (أ) معاملات Z للدائرة شكل 13-23(a) ، (ب) التمثيل المكافىء الذى يستخدم مقاومتين موجبتين ومنبع جهد تابع .



شكل 13-23

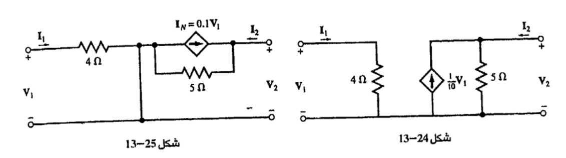
(أ) من تطبيق KVL حول حلقتين الدخل والخرج فإننا نجد على التوالى :

$$V_1 = 2I_1 - 2I_2 + 2(I_1 + I_2) = 4I_1$$

$$V_2 = 3I_2 + 2(I_1 + I_2) = 2I_1 + 5I_2$$

وتكون معاملات Z هى $Z_{11} = 4$ ، $Z_{12} = 0$ ، $Z_{21} = 2$ ، $Z_{22} = 5$ وبالتالى فإن $D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 20$ وبالتالى :

(ب) لشكل 13-24 ذو المقاومتين ومنبع التيار نفس معاملات Y التى فى الدائرة شكل 13-23(a) . ويمكن تحقيق ذلك باستخدام KCL لعقدتى الدخل والخرج .

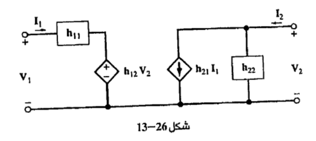


شكل 25–13　　　　　　　　　　　　　　　　　　شكل 24–13

13.14 بالرجوع لشبكة شكل (b)13-23 حول منبع الجهد ومقاومة التوالى له لمكافئ نورتون وبين أن الشبكة الناتجة تكون مطابقة مع شكل 24-13 .

التيار المكافئ لنورتون للمنبع $I_N = 2I_1 / 5 = 0.4\ I_1$ ولكن $I_1 = V_1/4$ لذلك $I_N = 0.4\ I_1 = 0.1V_1$ وتوضع المقاومة 5Ω على التوازى مع I_N والدائرة المبينة شكل 25-13 وهى نفسها كما فى الدائرة شكل 24-13 .

13.15 إذا علمت معاملات h للشبكة ذات المدخلين . بين أنه يمكن تمثيل الشبكة بشبكة شكل 26-13 حيث h_{11} هى معاوقة ، h_{12} هى كسب الجهد ، h_{21} هى كسب التيار ، h_{22} هى مسامحة .



شكل 26–13

استخدم KVL حول حلقة الدخل لتحصل على :

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

نستخدم KCL عند عقدة الخرج لتحصل على :

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

هذه النتائج تتفق مع تعريف معاملات h المعطاه فى (23) .

13.16 أوجد معاملات h للدائرة شكل 25-13 .

بمقارنة الدائرة شكل 25-13 بتلك التى فى شكل 26-13 نجد أن :

$$\mathbf{h}_{11} = 4\ \Omega, \quad \mathbf{h}_{12} = 0, \quad \mathbf{h}_{21} = -0.4, \quad \mathbf{h}_{22} = 1/5 = 0.2\ \ \Omega^{-1}$$

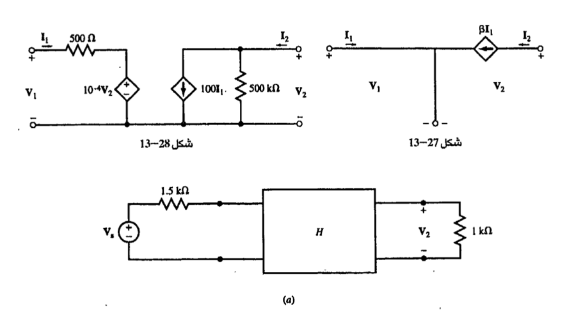
13.17 أوجد معاملات h للدائرة شكل 25-13 من معاملات Z لها وقارن بالنتائج التى فى المسألة 16-13 .

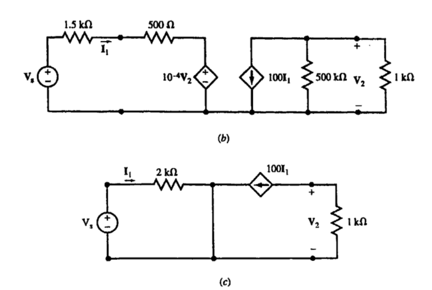
بالرجوع للمسألة 13-13 من أجل قيم معاملات Z ، D_{ZZ} . استخدم الجدول 1-13 للحصول على التحويلات من معاملات Z وإلى معاملات h للدائرة وبالتالى :

$$\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{D_{ZZ}}}{\mathbf{Z}_{22}} = \frac{20}{5} = 4 \qquad \mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{Z}_{22}} = 0 \qquad \mathbf{h}_{21} = \frac{-\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{Z}_{22}} = \frac{-2}{5} = -0.4 \qquad \mathbf{h}_{22} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{22}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

النتائج السابقة تتفق مع نتائج مسألة 16-13 .

13.18 تبين الدائرة شكل 27-13 التمثيل المبسط لوصلة ترانزستور ثنائية للإشارات الصغيرة. أوجد معاملات h لها .





شكل 29–13

مـعادلات الأطـراف هـى $V_1 = 0$ ، $I_2 = \beta I_1$ وبمقارنـة هذه المعـادلات مع (23) نستنتج أن $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$ ، $h_{12} = \beta$.

13.19 إذا كانت معاملات h للنبيطة H ذات المدخلين هى :

$$h_{11} = 500\ \Omega \qquad h_{12} = 10^{-4} \qquad h_{21} = 100 \qquad h_{22} = 2(10^{-6})\ \Omega^{-1}$$

ارسم تمثيلاً للدائرة للنبيطة المكونة من مقاومتين ومنبعين تابعين متضمناً قيمة كل عنصر .

بالمقارنة مع شكل 13-26 نرسم النموذج لشكل 13-28 .

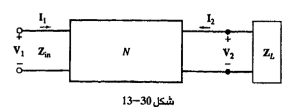
13.20 النبيطة H للمسألة 13-19 وضـعت فى دائرة شكل (a)13-29 استبدل H بتمثيلها فى شكل 13-28 . وأوجد V_2/V_s.

الدائرة شكل (b)13-29 تشمل التمثيل للدائرة . وبتقريب معقول يمكن تبسيطها لشكل (c)13-29 والتى منها :

$$I_1 = V_s/2000 \qquad V_2 = -1000(100I_1) = -1000(100V_s/2000) = -50V_s$$

Thus, $V_2/V_s = -50$.

13.21 وصل حمل Z_L لخرج النبيطة N ذات المدخلين (شكل 30-13). والتى يكون خواص الأطراف لها هى $V_1 = (1/N)\ V_2$ ، $I_1 = -NI_2$. أوجد (أ) معاملات T للنبيطة N ، (ب) معاوقة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$.



شكل 30–13

(أ) تعرف معاملات T بالتالى [انظر (29)].

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$
$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

خواص الأطراف للنبيطة هى:

$$V_1 = (1/N)V_2$$
$$I_1 = -NI_2$$

بمقارنة الزوجين من المعادلات نحصل على $A = 1/N$ ، $B = 0$ ، $C = 0$ ، $D = N$.

(ب) ثلاث معادلات تربط V_1 ، I_1 ، V_2 ، I_2 ويمكن الحصول عليها. أثنان منها نحصل عليها من خواص الأطراف للنبيطة ونحصل على الثالثة من التوصيل للحمل.

$$V_2 = -Z_L I_2$$

بحذف V_2 ، I_2 من الثلاث معادلات نحصل على:

$$V_1 = Z_L I_1 / N^2 \qquad \text{from which} \qquad Z_{in} = V_1/I_1 = Z_L/N^2$$

13.22 معاملات Z للشبكة N ذات المدخلين (a)22-13 هى $Z_{11} = 4s$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ ، $Z_{22} = 9s$. أوجد تيار الدخل i_1 للجهد $\upsilon_s = \cos 1000t$ (V) باستخدام معاوقة خواص الأطراف للدائرة المفتوحة للنبيطة N وذلك بالإضافة مع معادلات KCL عند العقد A ، B ، C .

الجواب: $i_1 = 0.2 \cos (1000t - 36.9°)$ (A)

13.23 عبر عن قاعدة قابلية العكس بدلالة كل من معاملات h ، g ، T .

الجواب : $\mathbf{h}_{12} + \mathbf{h}_{21} = 0,\ \mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{21} = 0$, and $AD - BC = 1$

13.24 أوجد معاملات T للنبيطة ذات المدخلين التي لها معاملات Z هى : $Z_{11} = s$ ، $Z_{21} = Z_{12} = 10s$ ، $Z_{22} = 100s$.

الجواب : $A = 0.1,\ B = 0,\ C = 10^{-1}/s$, and $D = 10$

13.25 أوجد معاملات T لنبيطة ذات مدخلين التى لها معاملات Z كالتالى $Z_{11} = 10^6 s$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 10^7 s$ ، $Z_{22} = 10^8 s$. قارن بالنتائج للمسألة 21-13 .

الجواب : $A = 0.1$ ، $B = 0$ ، $C = 10^{-7}/s$ ، $D = 10$ وعند الترددات العالية فإن النبيطة ستكون مشابهة بتلك فى المسألة 21-13 مع $N = 10$.

13.26 معاملات Z للنبيطة N ذات المدخلين هى $Z_{11} = ks$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 10ks$ ، $Z_{22} = 100ks$. وصلت مقاومة 1Ω على طرفى الخرج (شكل 10-13) (أ) أوجد معاوقة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$ وكون الدائرة المكافئة لها . (ب) أوجد قيم العناصر عند $k = 1$ ، $k = 10$.

الجواب : $Z_{in} = \dfrac{ks}{1 + 100ks} = \dfrac{1}{100 + 1/ks}$

الدائرة المكافئة هى دائرة توازى RL وبها $R = 10^{-2}\ \Omega$ ، $L = 1\ kH$.

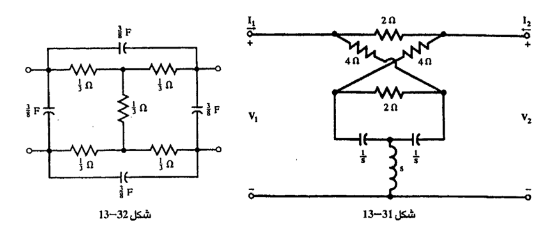
(ب) لقيم $k = 1,\ R = \frac{1}{100}\ \Omega$ and $L = 1\ H$. For $k = 10^6,\ R = \frac{1}{100}\ \Omega$ and $L = 10^6\ H$

13.27 النبيطة N فى شكل 30-13 تحدد بمعاملات Z التالية $Z_{22} = N^2 Z_{11}$ ، $Z_{12} = Z_{21} = \sqrt{Z_{11} Z_{22}} = NZ_{11}$. أوجد $Z_{in} = V_1/I_1$ حينما نوصل الحمل Z_L لطرفى الخرج . بين أنه إذا كان $Z_{11} >> Z_L / N^2$ فإننا نحصل على مقياس للمعاوقة حيث أن $Z_{in} = Z_L / N^2$.

الجواب : $Z_{in} = \dfrac{Z_L}{N^2 + Z_L/Z_{11}}$. For $Z_L \ll N^2 Z_{11},\ Z_{in} = Z_L/N^2$

13.28 أوجد معاملات Z فى الدائرة شكل 31-13 ملحوظة : استخدم قانون توصيلة التوالى .

الجواب : $Z_{11} = Z_{22} = s + 3 + 1/s,\ Z_{12} = Z_{21} = s + 1$



شكل 13-32

شكل 13-31

13.29 أوجد معاملات Y فى الدائرة شكل 13-32 . ملحوظة استخدم قانون توصيلة التوازى .

الجواب: $Y_{11} = Y_{22} = 9(s + 2)/16,\ Y_{12} = Y_{21} = -3(s + 2)/16$

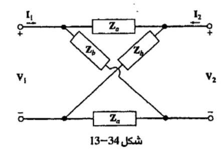
13.30 شبكتان a ، b ذات دخلين معاملات الإرسال T_a ، T_b موصلتان بتتابع (شكل 13-14) بحيث $I_{2a} = -I_{1b}$ ، $V_{2a} = V_{1b}$. أوجد معاملات T للشبكة الناتجة ذات المدخلين .

الجواب: $A = A_aA_b + B_aC_b,\ B = A_aB_b + B_aD_b,\ C = C_aA_b + D_aC_b,\ D = C_aB_b + D_aD_b$

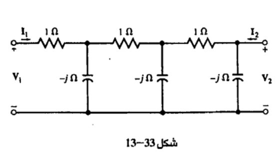
13.31 أوجد معاملات T ومعاملات Z للشبكة فى شكل 13-33 علماً بأن معاوقات المكثفات معطاه .

ملحوظة : استخدم قاعدة التتابع .

الجواب: $A = 5j - 4,\ B = 4j + 2,\ C = 2j - 4,$ and $D = 3j,\ Z_{11} = 1.3 - 0.6j,\ Z_{22} = 0.3 - 0.6j,\ Z_{12} = Z_{21} = -0.2 - 0.1j$



شكل 13-34



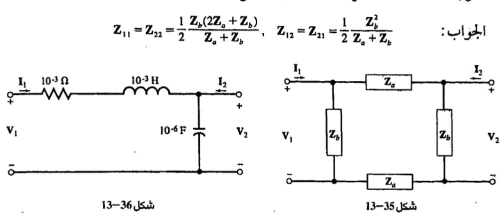
شكل 13-33

13.32 أوجد معاملات Z للدائرة ذات المدخلين لشكل 13-34 .

الجواب: $Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{2}(Z_b + Z_a),\ Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a)$

13.33 أوجد معاملات Z للدائرة ذات المدخلين لشكل 13-35 .

الجواب: $\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{Z}_{22} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{Z}_b(2\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b)}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b}, \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{Z}_b^2}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b}$



شكل 13-36

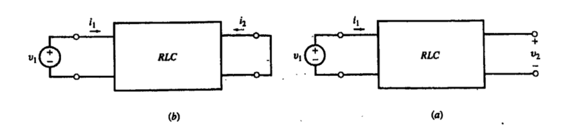
شكل 13-35

13.34 بالرجوع للدائرة ذات الدخلين لشكل 13-36 أوجد معاملات T لدالة ω وحدد قيمها عند $\omega = 1, 10^3, 10^6$ rad/s .

الجواب: $\mathbf{A} = 1 - 10^{-9}\omega^2 + j10^{-9}\omega$, $\mathbf{B} = 10^{-3}(1 + j\omega)$, $\mathbf{C} = 10^{-6}j\omega$, and $\mathbf{D} = 1$. At $\omega = 1$ rad/s, $\mathbf{A} = 1$, $\mathbf{B} = 10^{-3}(1 + j)$, $\mathbf{C} = 10^{-6}j$, and $\mathbf{D} = 1$. At $\omega = 10^3$ rad/s, $\mathbf{A} \approx 1$, $\mathbf{B} \approx j$, $\mathbf{C} = 10^{-3}j$, and $D = 1$. At $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{A} \approx -10^3$, $\mathbf{B} \approx 10^3 j$, $\mathbf{C} = j$, and $\mathbf{D} = 1$.

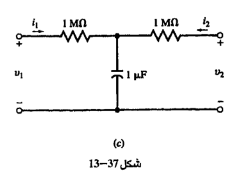
13.35 شبكة ذات مدخلين تحتوى على مقاومة ومكثفات وملفات فقط . وعند فتح المدخل ≠ 2 [شكل 13-37(a)] استخدم جهد الوحدة السلمى $\upsilon_1 = u(t)$ ونتج عنه التيار $i_1 = e^{-t}u(t)$ ، $\upsilon_2 = (1-e^{-t})\mu(t)$ (V) . وعند قصر المدخل ≠ 2 [شكل 13-37(b)] فإن جهد الوحدة السلمى $\upsilon_1 = u(t)$ أعطى التيار $i_1 = 0.5\,(1 + e^{-2t})\,u(t)$ (μA) . أوجد i_2 ومكافئ T للشبكة .

الجواب: $i_2 = 0.5(-1 + e^{-2t})u(t)$ [see Fig. 13-37(c)]



(b)

(a)

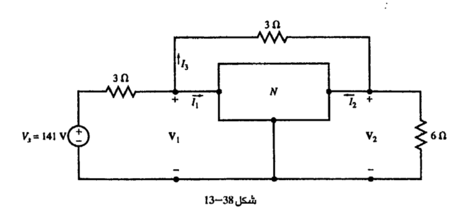


(c)

شكل 13-37

13.36 تعرف الشبكة N ذات المدخلين لشكل 38-13 بالمعاوقات التالية $Z_{11} = 2$ ، $Z_{12} = Z_{21} = 1$ ، $Z_{22} = 4$. أوجد I_1 ، I_2 ، I_3.

الجواب: $I_1 = 24$ A, $I_2 = 1.5$ A, and $I_3 = 6.5$ A.



شكل 13-38

الفصل الرابع عشر

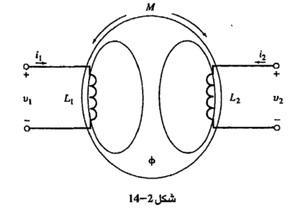
الحث المتبادل والمحولات

14.1 الحـــث المتبـــادل

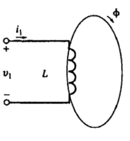
يتناسب المجال λ المتدفق من عضو حثى خطى مصنوع من ملف مع التيار المار به أى أن LI =
(انظر شكل 1-14) . ومن قانون فارادى فإن الجهد على طرفى العنصر الحثى يكون مساوياً للتفاضل
بالنسبة للزمن للمجال الكلى المتدفق أى أنه

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

والمعامل L بالهنرى H يسمى الحث النفسى للملف .



شكل 2-14



شكل 1-14

وعند وجود موصلين من دائرتين مختلفتين متقاربان لحد ما من بعضهما فإنهما يكونان متقارنـ
مغناطيسياً لدرجة تعتمد على وضعهما بالنسبة لبعض ومعدل تغير التياران . ويزداد هذا التقارن حيـ
يكون أحد الملفين ملفوف حول الآخر . ويتعاظم هذا التقارن إذا وضع بالإضافة لذلك قلب حـد

لين مما يساعد على إمرار المجال المغناطيسى. (ومع ذلك فإن وجود الحديد يمكن أن يتسبب عنه مجال غير خطى).

ولإيجاد علاقة الجهد والتيار على طرفى الملفان المتقارنان كما هو مبين فى شكل 2-14 فإننا نلاحظ أن المجال المغناطيسى الكلى المتدفق فى كل ملف ينتج من التيارين i_1 ، i_2 وبالتالى فإن تأثير التدفق بين الملفين سيكون متماثل.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2$$
$$\lambda_2 = M i_1 + L_2 i_2 \qquad (1)$$

حيث M هو الحث المتبادل (بالهنرى H).

ويكون جهدى الأطراف هو التفاضل بالنسبة للزمن للمجال المتدفق.

$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
$$v_2(t) = \frac{d\lambda_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (2)$$

تكون الملفات المتقارنة حالة خاصة من الشبكة ذات المدخلين التى نوقشت فى الفصل 13 وخواص الأطراف (2) والتى يمكن التعبير عنها فى مجال التردد أو فى مجال s كالتالى:

مجال s

$$\mathbf{V}_1 = L_1 s\mathbf{I}_1 + M s\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = M s\mathbf{I}_1 + L_2 s\mathbf{I}_2 \qquad (4)$$

مجال التردد

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2 \qquad (3)$$

ويناقش معامل التقارن M فى بند 2-14 . وتتعامل معادلات مجال التردد (3) مع الحالة الجيبية المستقرة. المعادلات (4) فى مجال s تفترض أن المنابع أسية مع تردد مركب .

مثـــال 14.1 : إذا كان $L_1 = 0.1$ H ، $L_2 = 0.5$ H ، $i_1(t) = i_2(t) = \sin \omega t$ فى الملفين المتقارنين فى شكل 2-14 . أوجد $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ لقيم (أ) $M = 0.01$ H ، (ب) $M = 0.2$ H ، (جـ) $M = -0.2$ H من (2).

(أ) $v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t + 0.01\omega \cos \omega t = 0.11\omega \cos \omega t \quad (V)$

$v_2(t) = 0.01\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.51\omega \cos \omega t \quad (V)$

(ب) $v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t + 0.2\omega \cos \omega t = 0.3\omega \cos \omega t \quad (V)$

$v_2(t) = 0.2\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.7\omega \cos \omega t \quad (V)$

(جـ) $v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t - 0.2\omega \cos \omega t = -0.1\omega \cos \omega t \quad (V)$

$v_2(t) = -0.2\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.3\omega \cos \omega t \quad (V)$

14.2 معامـــل التقـــارن

ملف يحتوى على N لفه بمجال مغناطيسى ϕ يتدفق فى كل لفة وله مجال مغناطيسى متدفق كلى $\lambda = N\phi$. ومن قانون فاراداى فإن القوة الدافعة الكهربية emf (الجهد فى الملف يكون $e = d\lambda/dt =$ $N\,(d\phi/dt)$ وتستخدم إشارة سالبه غالباً فى هذه المعادلة للإشارة إلى أن قطبية الجهد تنشأ حسب قانون لينز . ومن تعريف الحث النفسى فإ هذه الجهد يعطى أيضاً بالعلاقة $L(di/dt)$ ولذلك :

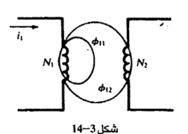
$$L\frac{di}{dt} = N\frac{d\phi}{dt} \qquad \text{or} \qquad L = N\frac{d\phi}{di} \tag{5a}$$

ووحدات ϕ هى الويبر حيث $1\ Wb = 1\ V.s$ وبالتالى من العلاقة السابقة فإن $1\ H = 1\ Wb/A$ وسنعتبر خلال هذا الكتاب أن ϕ ، i متناسبان مع بعضهما وينتج عن ذلك :

$$L = N\frac{\phi}{i} = \text{constant} \tag{5b}$$

المجال الكلى ϕ_1 فى شكل 3-14 الناشئ من التيار i_1 من خلال اللفات N_1 يتكون من مجال شارد ϕ_{11} ومجال مغناطيسى قارن ϕ_{12} . وتكون القوى الدافعة الكهربية emf فى الملف المتقارن هى $N_2(d\phi_{12}/dt?$. وهذا الجهد نفسه يمكن كتابته باستخدام الحث المتبادل M .

$$e = M\frac{di_1}{dt} = N_2\frac{d\phi_{12}}{dt} \qquad \text{or} \qquad M = N_2\frac{d\phi_{12}}{di_1} \tag{6}$$



شكل 3—14

وحيث أن التقارن ثنائى الإتجاه فإن :

$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \tag{7}$$

ويعرف معامل التقارن k بأنه نسبة بين التدفق المؤثر إلي التدفق الكلى .

$$k \equiv \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

حيث $0 \le k \le 1$. وبأخذ حاصل ضرب (6) ، (7) وباعتبار أن k تعتمد فقط على التركيب الهندسى للنظام فإن :

$$M^2 = \left(N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}\right)\left(N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2}\right) = \left(N_2 \frac{d(k\phi_1)}{di_1}\right)\left(N_1 \frac{d(k\phi_2)}{di_2}\right) = k^2\left(N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}\right)\left(N_2 \frac{d\phi_2}{di_2}\right) = k^2 L_1 L_2 .$$

والتى منها

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad \text{or} \qquad X_M = k\sqrt{X_1 X_2} \tag{8}$$

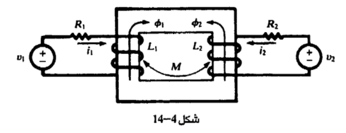
لاحظ أن (8) تشمل القيمة $M \le \sqrt{L_1 L_2}$ وهى تعنى إمكانية استنتاجها مستقلة بدلالة الطاقة .

إذا قطعت جميع خطوط المجال الملفات بدون أى مجال شارد فإن $k = 1$. ومن ناحية أخرى فإن محاور الملف يمكن أن توجه بحيث لا يكون هناك مجال من أحد الملفات ينتج عنه جهد فى الملف الآخر وبذلك تكون $k = 0$ ويستخدم التعبير التقارن المحكم لبيان الحالة حيث تقطع معظم خطوط القوى الملفات إما باستخدام قلب مغناطيسى لاحتواء المجال أو بوضع لفات الملفات مباشرة أحدهما فوق الآخر والملفات الموضوعة متجاورة مع بعضها وبدون قلب يعتبر تقارنها ضعيفاً وتكون قيمة الثابت k بالتالى منخفضة .

14.3 تحليل الملفات المتقارنة

القطبية للتقارن المحكم

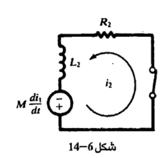
مبين فى شكل 4-14 ملفان على نفس القلب الذى يجمع المجال المغناطيسى ϕ وينشأ من هذا الوضع ما يسمى بالتقارب المحكم والذى ذكر فى بند 2-14 ولتحديد القطبية الصحيحة لجهد الحث المتبادل نستخدم قاعدة اليد اليمنى لكل ملف فإذا التفت الأصابع فى إتجاه التيار المفترض فإن الإبهام يشير إلى إتجاه المجال والإتجاهات الموجبة الناتجة لكل من ϕ_1 ، ϕ_2 مبينة فى الشكل. وإذا كان المجال ϕ_1 ، ϕ_2 فى نفس الإتجاه فإن إشارات (قطبية) جهد الحث المتبادل ستكون هى نفسها لجهد الحث النفسى وبذلك فإن الإشارة الموجبة ستكتب فى الأربع معادلات (2)، (3). وفى شكل 4-14 فإن ϕ_1، ϕ_2 تكون متعاكسة وبالتالى فإن المعادلتين (2)، (3) ستكتبان بالإشارة السالبة.



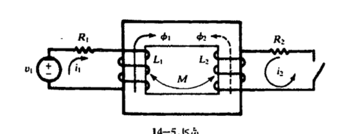
شكل 4–14

التيار الطبيعى

ويمكن فهم الملفات المتقارنة أيضاً من اعتبار مسار ثانى غير فعال كما فى شكل 5-14. والمنبع v_1 يدفع التيار i_1 مع المجال الناتج ϕ_1 كما هو مبين. ويقرر قانون لينز أن قطبية الجهد المستنتج فى الدائرة الثانية يكون بحيث إذا أكملت الدائرة سيمر تيار فى الملف الثانى فى إتجاه بحيث ينشأ عنه مجالاً معاكساً للمجال الأصلى الناتج من i_1. أى أنه حينما يقفل المفتاح فى شكل 5-14 فإن المجال ϕ_2 سيكون له الإتجاه المبين. قانون اليد اليمنى مع إشارة الإبهام فى إتجاه ϕ_2 يعطى إتجاه التيار الطبيعى i_2. ويكون الجهد المستنتج هو الجهد المؤثر فى الدائرة الثانية كما هو مبين فى شكل 6-14 وهذا الجهد سيكون موجوداً (سواء أقفلت الدائرة أم لا. وحينما يقفل المفتاح فإنه ينشأ التيار i_2 بإتجاهه الموجب المبين.



شكل 14-6



شكل 14-5

مثـــال 14.2 : أفرض أن المفتاح فى الحلقة الغير فعالة كا مقفلاً عند اللحظة $(t = 0)$ لقيم $t > 0$ فإن تعاقب هذه الحلقة سيكون (انظر شكل 14-6) .

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = 0$$

بينما يكون بالنسبة للحلقة الفعالة :

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = v_1$$

وبكتابة المعادلتين السابقتي فى مجال s مع الحالات الابتدائية $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ وبحذف $I_1(s)$ نجد أن :

$$H(s) \equiv \frac{\text{response}}{\text{excitation}} = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Ms}{(L_1L_2 - M^2)s^2 + (R_1L_2 + R_2L_1)s + R_1R_2}$$

ومن أقطاب H(s) نحصل على الترددات الطبيعية للتيار i_2 .

14.4 قاعـدة النقطـة

إشارة جهد الحث المتبادل يمكن تحديدها إذا كان إتجاه اللف كما هو موضح بالدائرة فى شكل 14-4 ، 14-5 . ولتبسيط مسألة الحصول على الإتجاه الصحيح (الإشارة الصحيحة) فإن الملفات توضع عليها علامة نقط عند الأطراف التى تكون لها نفس القطبية فى نفس اللحظة .

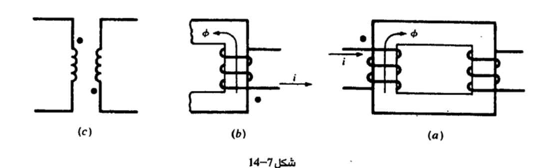
ولتحديد النقط لزوج الملفات المتقارنة نختار إتجاه للتيار فى أحد الملفين ونضع نقطة عند الطرف الذى يدخل فيه التيار إلى اللفات . ثم تحدد المجال الناشئ بتطبيق قاعدة اليد اليمنى [انظر شكل

[14-7(a)]. وبالتالى فإن المجال فى الملف الآخر تبعاً لقانون لينز سيكون عكس المجال الأول. ثم استخدم قاعدة اليد اليمنى لإيجاد إتجاه التيار الطبيعى المناظر لهذا المجال الثانى [انظر شكل 14-7(b)]. والآن ضع نقطة على طرف الملف الثانى حيث يخرج التيار من الملف ويكون هذا الطرف موجباً فى نفس اللحظة التى يدخل فيها التيار لطرف الملف الأول حيث يكون هو الآخر موجب.

وعند استخدام القطبية اللحظية لأطراف الملفات المتقارنة عن طريق وضع النقط فإن تمثيل الملفات مع القلب اللازم لها لم يعد من الأهمية بمكان وليس مطلوباً وبذلك يمكن بيان الملفات المتقارة كما فى شكل 14-7(c). وتستخدم قاعدتى العقدة كما يلى:

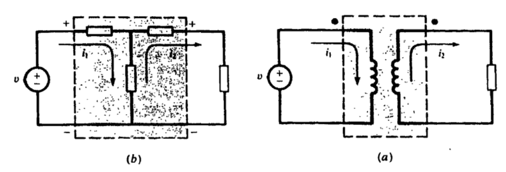
(1) حينما يكون كلا التياران داخلاً أو خارجاً من زوج من الملفات المتقاون عن طريق الأطراف المنقوطة فإن إشارات كلاً من M و L ستكون واحدة ولكن

(2) إذا دخل التيار عن طريق طرف منقوط بينما يخرج من الطرف المنقوط الآخر فإن إشارات M ستكون مخالفة لإشارات L.



شكل 14-7

مثـــال 14.3 : تم اختيار اتجاهات التيار فى شكل 14-8(a) بحيث أن الإشارات على M تكون مخالفة لإشارات L وتبين النقط الأطراف التى لها نفس القطبية فى نفس اللحظة. قارن ذلك بالدائرة الموصلة لشكل 14-8(b) والتى بها يمر تيارا الشبيكة خلال عنصر مشترك فى إتجاهين متضادين والتى فيها تكون علامات القطبية هى نفسها مثل النقط فى الدائرة المتقارنة مغناطيسياً ويصبح التشابه أكثر وضوحاً بتظليل الأجزاء الوسطى للشكلين كما هو مبين.



شكل 8–14

14.5 الطاقة المختزنة فى زوج من الملفات المتقارنة

الطاقة المختزنة فى عنصر حثى واحد L يحمل التيار i هى $0.5Li^2J$ بينما تكون الطاقة المختزنة فى ملفين متقارنين هى :

$$W=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+Mi_1i_2 \quad (J) \qquad (9)$$

حيث L_1 ، L_2 معاملا الحث للملفين، M هى الحث المتبادل لهما . والحد Mi_1i_2 فى بند (9) يمثل الطاقة بالنسبة لتأثير الحث المتبادل وتكون إشارة هذا الحث هى (أ) موجبة إذا كان كلا التياران i_1 ، i_2 يدخلان إما فى طرفين منقوطين أو طرفين غير منقوطين . (ب) سالبة إذا دخل أحد التياران من طرف منقوط ودخل الآخر من طرف غير منقوط .

مثـــال 14.4 : زوج من الملفات $L_1 = 0.1$ H ، $L_2 = 0.2$ H وكان فى نفس اللحظة $i_1 = 4A$ ، $i_2 = 10A$. أوجد الطاقة الكلية فى الملفين إذا كان معامل التقارن M هو (أ) 0.1 H ، (ب) $\sqrt{2}/10$ H ، (جـ) -0.1 H ، (د) $-\sqrt{2}/10$ H .

من (9)

(a) $W = (0.5)(0.1)4^2 + (0.5)(0.2)10^2 + (0.1)(10)(4) = 14.8J$

(b) W = 16.46 J

(c) W = 6.8 J

(d) W = 5.14 J

تحدث القيمة العظمى والصغرى للطاقة مع وجود معامل تقارن موجب تماماً ($M = \sqrt{2}/10$) ومعامل تقارن سالب تماماً ($M = -\sqrt{2}/10$).

14.6 الدوائر المكافئة المتقارنة الموصلة

من معادلات تيار الشبيكة المكتوب للملفات المتقارنة مغناطيسياً فإنه يمكن إنشاء دائرة موصلة مكافئة لدائرة التقارن وإذا اعتبرنا الدائرة الجيبية المستقرة لشكل 14-9(a) مع تيارات الشبيكة المبينة فإن المعادلات المناظرة فى صورة المصفوفة هى :

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

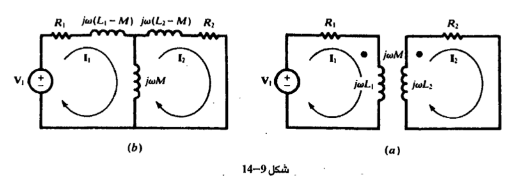
وفى شكل 14-9(b) فإن الممانعة الحثية $X_M = \omega M$ تحمل تيارى الشبيكة فى إتجاهين متضادين وبذلك :

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = -j\omega M$$

فى مصفوفة Z . والآن إذا وضعنا عنصر حثى L_1-M فى الحلقة الأولى فإن معادلة تيار الشبيكة لهذه الحلقة سيكون :

$$(R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$

وبالمثل فإن L_2-M فى الحلقة الثانية ينتج عنه نفس معادلة تيار الشبيكة كما فى دائرة ملف متقارن. وبالتالى فإن الدائرتين تكونان متكافئتان. ولسنا فى حاجة لاستخدام قاعدة النقطة فى الدائرة المتقارنة الموصلة وبذلك يمكن استخدام الطرق المألوفة للحل.



شكل 14–9

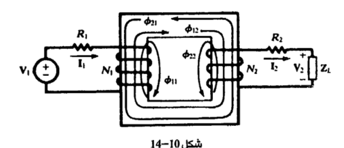
14.7 المحـــول الخطـــى

المحول هو نبيطة تقوم بعمل التقارن المتبادل بين اثنين أو أكثر من الدوائر الكهربية . ومصطلح «محول ذو قلب حديدى» يبين أن الملفات تكون متقارنة تلف على قلب مغناطيس من رقائق الصلب الخاص لاحتواء المجال وجعل التقارن أكبر ما يمكن . والمحولات ذات القلب الهوائى توجد فى التطبيقات الإلكترونية والاتصالات . ومجموعة ثالثة تتكون من ملفات ملفوفة فوق بعضها البعض على مادة غير معدنية مع شريحة مغناطيسية متحركة فى الوسط لتغيير التقارن .

ويجب ملاحظة بالنسبة للمحولات ذات القلب الحديدى حيث الانفاذية μ للحديد تعتبر ثابتة فى مدى تغير قيم الجهد والتيار . وذلك فى الغالب مقصور للمحولات ذات الملفين ولو أنه من المعتاد أيضاً وجود ثلاث أو أربع ملفات على نفس القلب .

فى شكل 10-14 وصل الملف الابتدائى ولفاته N_1 إلى جهد المنبع V_1 ، ملفات الثانوى وعدد لفاته N_2 وصل للحمل ذو المعاوقة Z_L ومبين مقاومات الملفات كقيم منفصلة R_1 ، R_2 . التيار الطبيعى I_2 ينشأ عنه المجال $\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{22}$ وبدلالة معامل التقارن k .

$$\phi_{11} = (1-k)\phi_1 \qquad , \quad \phi_{22} = (1-k)\phi_2$$



شكل 10-14

من علاقات المجال فإنه يمكن إيجاد علاقة للحث الهارب بالنسبة للحث النفسى .

$$L_{11} \equiv (1-k)L_1 \qquad L_{22} \equiv (1-k)L_2$$

وبالتالى فإن الممانعة الهاربة ستكون :

$$X_{11} \equiv (1-k)X_1 \qquad X_{22} \equiv (1-k)X_2$$

ويمكن بيان أن معامل الحث L لملف ذو N لفة يكون متناسباً مع N^2 وبالتالى فإنه بالنسبة لملفين ملفوفين على نفس القلب .

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \qquad (10)$$

المجال المشترك لكلا الملفين فى شكل 10-14 هو المجال $\phi_m = \phi_{12} - \phi_{21}$ هذا المجال يستنتج من قيمة emfs بقانون فاراداى .

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \qquad e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt}$$

وبتعريف نسبة التحويل $N_1/N_2 = a$ نحصل على هذه المعادلة الأساسية للمحول الخطى .

$$\frac{e_1}{e_2} = a \qquad (11)$$

وفى مجال التردد $E_1/E_2 = a$

والعلاقة بين المجال المتبادل والحث المتبادل يمكن الحصول عليه بتحليل emf والمستنتجة فى الثانوى كالتالى :

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d(k\phi_2)}{dt}$$

باستخدام (6)، (5a) يمكن كتابة السابق كما يلى :

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} - kL_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{a} \frac{di_2}{dt}$$

حيث تشمل الخطوة الأخيرة (8)، (10) .

$$M = k\sqrt{(a^2 L_2)(L_2)} = kaL_2$$

والآن يمكن تعريف تيار المغنطة i_ϕ بالمعادلة :

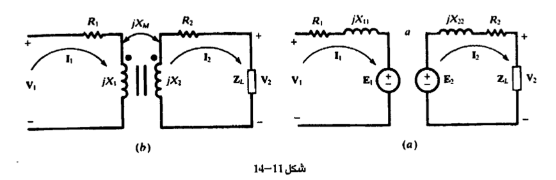
$$i_1 = \frac{i_2}{a} + i_\phi \qquad \text{or} \qquad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_2}{a} + \mathbf{I}_\phi \qquad (12)$$

لدينا

$$e_2 = M \frac{di_\phi}{dt} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{E}_2 = jX_M \mathbf{I}_\phi \qquad (13)$$

تبعاً للمعادلة 13 فإنه يمكن اعتبار تيار المغنطة أنه يتسبب فى المجال المتبادل ϕ_m فى القلب.

وباعتبار القوة الدافعة للملف والممانعة الهاربة، يمكن رسم دائرة مكافئة للمحول الخطى حيث يكون الملف الابتدائى والملف الثانوى متقارنان فعلياً. وهذا مبين فى شكل (a)14-11 وللمقارنة فإن الدائرة المكافئة المنقوطة المبينة فى شكل (b)14-11.



شكل 11–14

مثـــال 15.4 : ارسم شكل متجهات للجهد والتيار المناظر لشكل (a)14-11 ومنه أوجد معاوقة الدخل للمحول.

شكل متجهات مبين فى شكل 12-14 وفيه θ_L تعبر عن زاوية الوجه للقيمة Z_L لاحظ أنه بالرجوع للمعادلة (13) فإن emfs المستنتجة E_1 ، E_2 تتقدم تيار المغنطة I_ϕ بالزاوية °90 ويشمل الشكل الثلاث معادلات المتجهة.

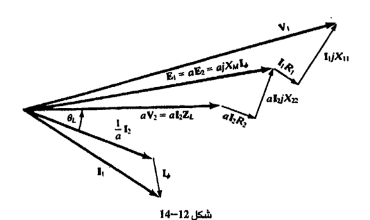
$$\mathbf{V}_1 = ajX_M\mathbf{I}_\phi + (R_1 + jX_{11})\mathbf{I}_1$$

$$jX_M\mathbf{I}_\phi = (\mathbf{Z}_L + R_2 + jX_{22})\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{a}\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_\phi$$

وبحذف I_2 ، I_ϕ من هذه المعادلات ينتج:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \equiv \mathbf{Z}_{\text{in}} = (R_1 + jX_{11}) + a^2\frac{(jX_M/a)(R_2 + jX_{22} + \mathbf{Z}_L)}{(jX_M/a) + (R_2 + jX_{22} + \mathbf{Z}_L)} \qquad (14a)$$



شكل 14-12

وإذا استخدم بدلا لذلك معادلات تيار الشبيكة لشكل (b)14-11 لإيجاد Z_{in} .

$$Z_{in} = R_1 + jX_1 + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + Z_L} \tag{14b}$$

ويمكن للقارئ التحقق من التكافؤ بين (14a) ، (14b) انظر المسألة 14-36 .

14.8 المحــول المثالــى

يعتبر المحول المثالى افتراضياً حيث لا وجود له وهو الخالى من المفاقيد والانفاذية له ما لا نهاية وينتج عن ذلك تقارن كامل بدون مجال هارب. وفى محولات القدرة الكبيرة تكون المفاقيد صغيرة بالنسبة لقدرة المحول نفسه حيث تعتبر العلاقات المستخدمة فى المحول المثالى قريبة الاستخدام لهذه المحولات فى التطبيقات الهندسية.

وبالرجوع لشكل 14-13 فإن حالات المفاقيد تعطى بالعلاقة :

$$\tfrac{1}{2}V_1I_1^* = \tfrac{1}{2}V_2I_2^*$$

(انظر بند 10-7) ولكن:

$$V_1 = E_1 = aE_2 = aV_2$$

حيث القيمة a حقيقية .

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = a \tag{15}$$

ونحصل على قدرة الدخل من العلاقات :

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{a\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2/a} = a^2\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = a^2\mathbf{Z}_L \qquad (16)$$

شكل 13–14

مثـــال 14.6 : يعتبر المحول المثالى هو الحد الذى يصل إليه المحول الخطى بند 7-14 وبالتالى فى (14a) ضع .

$$R_1 = R_2 = X_{11} = X_{22} = 0$$

(حيث لا توجد مفاقيد) وبفرض $X_m \rightarrow \infty$ (إنفاذية القلب ما لا نهاية) لتحصل على :

$$\mathbf{Z}_{in} = \lim_{X_M \to \infty}\left[a^2\frac{(jX_M/a)(\mathbf{Z}_L)}{(jX_M/a) + \mathbf{Z}_L}\right] = a^2\mathbf{Z}_L$$

وهى تتفق مع (16) .

قاعدة نقطة الأمبير لفة

حيث أن $a = N_1/N_2$ فى (15) .

$$N_1\mathbf{I}_1 = N_2\mathbf{I}_2$$

أى أن الأمبير لفات فى الابتدائى مساوية للأمبير لفات للثانوى . ويمكن استنتاج قاعدة لتسرى على المحولات التى تحتوى على أكثر من ملفين . ونستخدم الإشارة الموجبة لحاصل ضرب الأمبير لفة إذا دخل التيار للملف من الطرف ذو النقطة وتوضح الإشارة السالبة إذا خرج التيار من الطرف ذو النقطة . وبالتالى فإن قاعدة نقطة الأمبير لفة تقرر أن المجموع الجبرى للأمبير لفات للمحول صفراً .

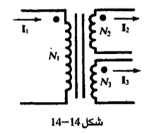
مثـــال 14.7 : للمحول ذو الثلاث ملفات المبين شكل 14-14 له $N_1 = 20$ ، $N_2 = N_3 = 10$ أوجد I_1 إذا كان $I_2 = 10.0 \angle -5313^\circ$ A ، $I_3 = 10.0 \angle -45^\circ$ A .

وباعتبار النقط وإتجاهات التيار المبين فى الشكل فإن :

$$N_1\mathbf{I}_1 - N_2\mathbf{I}_2 - N_3\mathbf{I}_3 = 0$$

ومنها

$$20\mathbf{I}_1 = 10(10.0\angle -53.13^\circ) + 10(10.0\angle -45^\circ)$$
$$\mathbf{I}_1 = 6.54 - j7.54 = 9.98\angle -49.06^\circ \quad \text{A}$$



شكل 14-14

14.9 المحـــول النفســى

المحول النفسى هو محول ذو ملف واحد ملفوف على قلب حديدى بحيث يحتوى على واحد أو أكثر من أطراف التوصيل . وتوصل أحد الدوائر بطرفى نهاية الملف بينما توصل الأخرى بأحد طرفى النهاية والنقطة البينية للملف .

وبالرجوع لشكل 14-15(a) فإن نسبة التحويل للمحول تكون :

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \equiv a + 1$$

والتى تزيد بواحد عن نسبة التحويل للمحول المثالى ذو الملفين الذى له نفس نسبة الملفات . ويتتج عن التيار I_1 المار فى الجزء العلوى أو التوالى ذو اللفات N_1 المجال ϕ_1 . وبقانون لينز فإن التيار الطبيعى فى الجزء السفلى للملف ينتج عنه مجال مضاد ϕ_2 . وبالتالى فإن التيار I_n يخرج من الجزء السفلى من النقطة البينية . ومبين فى شكل 14-15(b) موضع النقط على الملف . وفى المحول المثالى النفسى «كمحول مثالى» فإن كلا القدرة المركبة للدخل والخرج متساويان .

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_{ab}^* = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_L^*$$

وبالتالى

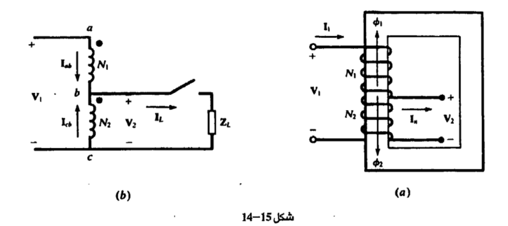
$$\frac{\mathbf{I}_L}{\mathbf{I}_{ab}} = a + 1$$

أى أن التيارات أيضاً لها نفس نسبة التحويل .

حيث $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{ab} + \mathbf{I}_{cb}$ فإن قدرة الخرج المركبة تتكون من جزئين :

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_L^* = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_{ab}^* + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_{cb}^* = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_{ab}^* + a(\tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_{ab}^*)$$

ويعزى الحد الأول على اليمين للتوصيل والثانى للحث . ولذلك فإنه يوجد تقارن توصيل وتقارن مغناطيسى بين المنبع والحمل فى المحول النفسى .



شكل 15−14

14.10 المعاوقة المنعكسة

يساهم الحمل Z_2 المتصل فى طرفى الثانوى للمحول كما فى شكل 16-14 فى قيمة معاوقة الدخل . وهذه المساهمة تسمى المعاوقة المنعكسة وباستخدام خواص الأطراف للملفين المتقارنين وباستخدام قانون KVL حول حلقة الثانوى نجد :

$$\mathbf{V}_1 = L_1 s\mathbf{I}_1 + Ms\mathbf{I}_2$$
$$0 = Ms\mathbf{I}_1 + L_2 s\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2$$

وبحذف I_2 نحصل على :

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = L_1 \mathbf{s} - \frac{M^2 \mathbf{s}^2}{\mathbf{Z}_2 + L_2 \mathbf{s}} \qquad (17)$$

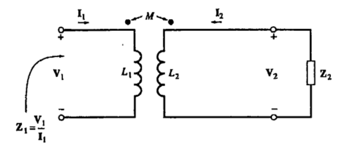
وفى حالة التيار المتردد المستقر حيث $s = j\omega$ نحصل على :

$$\mathbf{Z}_1 = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \qquad (18)$$

وتكون المعاوقة المنعكسة :

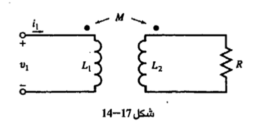
$$\mathbf{Z}_{\text{reflected}} = \frac{M^2 \omega^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \qquad (19)$$

والحمل Z_2 من ناحية المنبع يكون $M^2\omega^2 / (Z_2 + j\omega L_2)$ ، ونستخدم هذه الطريقة غالباً لتغيير المعاوقة لقيمة معينة وذلك لتواؤم الحمل مع المنبع مثلاً .



شكل 14–16 .

مثـــال 14.8 : إذا كان $L_1 = 0.2$ H ، $L_2 = 0.1$ H ، $M = 0.1$ H ، $R = 10\ \Omega$ فى الدائرة شكل 14-17 . أوجد i_1 لقيمة $v_1 = 142.3 \sin 100t$.



شكل 14–17

The input impedance $\mathbf{Z}_1$ at $\omega = 100$ is [see (*18*)]

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} = j20 + \frac{0.01(10000)}{10 + j10} = 5 + j15 = 5\sqrt{10}\angle 71.6^\circ$$

Then, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_1 = 9\angle -71.6^\circ \quad \text{A}$

or $i_1 = 9 \sin(100t - 71.6^\circ) \quad \text{(A)}$

مثـــال 14.9 : ضع $\upsilon_1 = u(t)$ بالرجوع لمثال 14-8 . أوجد $i_{1,f}$ وهو التجاوب القصرى .

معاوقة الدخل [انظر (17)] .

$$\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = L_1\mathbf{s} - \frac{M^2\mathbf{s}^2}{R + L_2\mathbf{s}}$$

وبالتعويض بالقيم المعطاه للعناصر نحصل على :

$$\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s}+200)}{10(\mathbf{s}+100)} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{Y}_1(\mathbf{s}) = \frac{10(\mathbf{s}+100)}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+200)}$$

لقيم $t > 0$ ، الدخل $\upsilon_1 = 1$ V هو قيمة أسية e^{st} والتى فيها $s = 0$ هو قطب للدالة $Y_1(s)$ وبالتالى فإن $i_{1,f} = kt$ حيث $k = 1/L_1 = 5$. ويمكن الحصول مباشرة على هذه النتيجة بتحليل الدائرة شكل 14-17 للتيار المستمر .

مسائل محلولة

14.1 إذا كان تيار أحد الملفين المتقارنين مغناطيسياً هو 5.0 A فإن المجالين الناتجين ϕ_{11} ، ϕ_{12} يكونان 0.2 mWb ، 0.4 mWb على الترتيب فإذا كانت اللفات هى $N_1 = 500$ ، $N_2 = 1500$ فأوجد L_1 ، L_2 ، M ومعامل التقارن k .

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 0.6 \text{ mWb} \qquad L_1 = \frac{N_1\phi_1}{I_1} = \frac{500(0.6)}{5.0} = 60 \text{ mH}$$

$$M = \frac{N_2\phi_{12}}{I_1} = \frac{1500(0.4)}{5.0} = 120 \text{ mH} \qquad k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = 0.667$$

Then, from $M = k\sqrt{L_1L_2}$, $L_2 = 540$ mH.

14.2 إذا كان معامل الحث النفسى للفين متقارنين هما $L_1 = 50$ mH ، $L_2 = 200$ mH ومعامل التقارن هو $k = 0.50$ وإذا كان الملف 2 له 1000 لفة $i_1 = 5.0 \sin 400t$ ، أوجد الجهد على طرفى الملف 2 والمجال ϕ_1 .

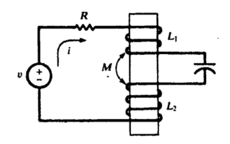
$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.50\sqrt{(50)(200)} = 50 \text{ mH}$$

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} = 0.05\frac{d}{dt}(5.0 \sin 400t) = 100 \cos 400t \quad \text{(V)}$$

ويفرض كالعادة أن الدائرة ذات تغير مغناطيسى خطى فإن :

$$M = \frac{N_2\phi_{12}}{i_1} = \frac{N_2(k\phi_1)}{i_1} \qquad \text{or} \qquad \phi_1 = \left(\frac{M}{N_2 k}\right)i_1 = 5.0 \times 10^{-4} \sin 400t \quad \text{(Wb)}$$

14.3 استخدم KVL لدائرة التوالى لشكل 18-14 .



شكل 18–14

وباختبار طريقة لف الملف نجد أن إشارات الحدود M مخالفة لإشارات حدود L .

$$Ri + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = v$$

$$Ri + L'\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = v$$

حيث $L' = L_1 + L_2 - 2M$ لأن

$$M \le \sqrt{L_1 L_2} \le \frac{L_1 + L_2}{2}$$

L' ليست سالبة

14.4 فى توصيلة توالى مساعدة فإن ملفين متقارنان لهما حث مكافئ L_A فى توصيلة توالى متضادة L_B . أوجد علاقة لقيمة M بدلالة L_A ، L_B.

كما فى المسألة 3-14 .

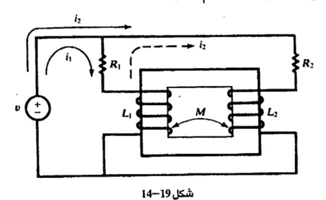
$$L_1 + L_2 + 2M = L_A \qquad L_1 + L_2 - 2N = L_B$$

والتى تعطى

$$M = \frac{1}{4}(L_A - L_B)$$

وهذه المسألة تقترح طريقة يمكن بها إيجاد M معملياً .

14.5 (أ) أكتب معادلات تيارات الشبيكة للملفين المتقارنين بالتيارين i_1 ، i_2 المبين شكل 9-14 . (ب) أعد الحل لقيمة i_2 كما هو مبين بالسهم المنقوط .



شكل 19–14

(أ) ومن طريقة لف الملف والإتجاهات المختارة ينتج إشارات حدود M كالتالى :

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v$$

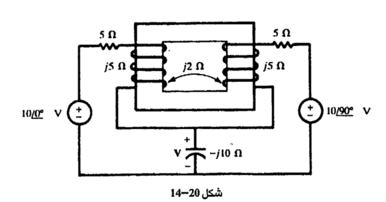
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v$$

(ب)

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

14.6 أوجد الدائرة المكافئة المنقوطة للدائرة المتقارنة شكل 20-14 . واستخدمها لإيجاد الجهد V على طرفى المعاوقة السعوية $10\ \Omega$.



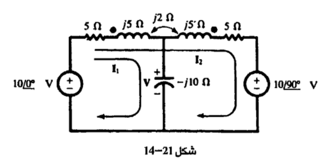
شكل 20−14

وبوضع النقط على الدائرة فإنه يكفى فقط مراعاة الملفات وإتجاه اللف . وأدخل التيار فى الطرف العلوى الأيسر للملف ونضع نقطة على هذا الطرف . وبالتالى فإن المجال المناظر سيكون لأعلى . وبقانون لينز فإن المجال فى الملف الأيمن يجب أن يكون لأعلى ليواجه المجال الأول . وبالتالى فإن التيار الطبيعى سيترك هذا الملف عن طريق الطرف العلوى والذى عليه علامة النقطة . ولتحصل على الدائرة المكافئة المنقوطة الكاملة انظر شكل 21-14 ومع اختيار التيارين I_1 ، I_2 لحساب V .

$$\begin{bmatrix} 5-j5 & 5+j3 \\ 5+j3 & 10+j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\underline{/0^\circ} \\ 10-j10 \end{bmatrix}$$

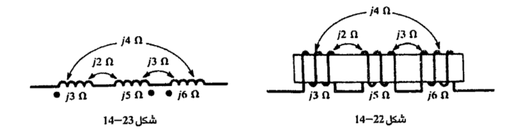
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5+j3 \\ 10-j10 & 10+j6 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 1.015\underline{/113.96^\circ} \quad A$$

and $V = I_1(-j10) = 10.15\underline{/23.96^\circ}$ V.



شكل 21−14

14.7 أوجد المكافئ المنقوط للدائرة المبينة شكل 27-14 واستخدم هذا المكافئ لإيجاد المعاوقة الحثية المكافئة.



شكل 14—23 شكل 14—22

أدخل تيارا فى الملف الأول وضع نقطة حيث يدخل هذا التيار وينشئ التيار الطبيعى فى كلا الملفين الآخرين مجالاً مضاداً لذلك الناتج عن التيار الداخل. ضع نقطاً فى مكان خروج التيار الطبيعى (يمكن لتلافى الارتباك إذا أهمل توصيل التوالى بينما تراعى أماكن النقط) ويكون الناتج فى شكل 23-14.

$$\mathbf{Z} = j3 + j5 + j6 - 2(j2) + 2(j4) - 2(j3) = j12\ \Omega$$

أى أن المعاوقة الحثية $12\ \Omega$.

14.8 (أ) أحسب الجهد V للدائرة المقارنة المبينة شكل 24-14 . (ب) أعد الحل مع عكس إشارة أحد الملفين.

(أ) $X_M = (0.8)\sqrt{5(10)} = 5.66\ \Omega$ وبالتالى فإن مصفوفة Z تكون :

$$\begin{bmatrix} 3+j1 & -3-j1.66 \\ -3-j1.66 & 8+j6 \end{bmatrix}$$

Then,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3-j1.66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 8.62\underline{/-24.79^\circ}\ \text{A}$$

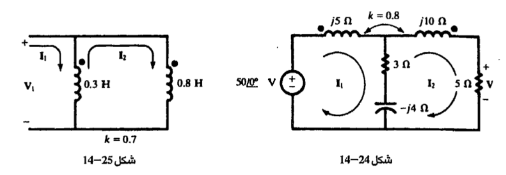
and $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2(5) = 43.1\underline{/-24.79^\circ}$ V.

(ب)

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} 3+j1 & -3+j9.66 \\ -3+j9.66 & 8+j6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3+j9.66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_\mathbf{Z}} = 3.82\angle -112.12^\circ \quad \text{A}$$

and $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2(5) = 19.1\angle -112.12^\circ$ V.



شكل 14-25

شكل 14-24

14.9 أوجد المكافئ الحثى للملفين المتقارنين الموصلين على التوازى كما فى شكل 14-25 .

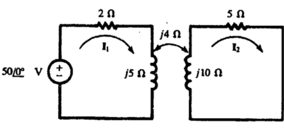
تم اختيار التيارين I_1 ، I_2 كما فى الرسم وبالتالى $Z_{in} = V_1/I_1$.

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega 0.3 & j\omega 0.043 \\ j\omega 0.043 & j\omega 0.414 \end{bmatrix}$$

and
$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{\Delta_{11}} = \frac{(j\omega 0.3)(j\omega 0.414) - (j\omega 0.043)^2}{j\omega 0.414} = j\omega 0.296$$

or L_{eq} is 0.296 H.

14.10 للدائرة المتقارنة المبينة شكل 26-11 بين أنه لا حاجة للنقط طالما أن الحلقة الثانية غير فعالة .



شكل 14-26

اختير التياران I_1 ، I_2 كما هو مبين .

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & \pm j4 \\ 0 & 5+j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5+j10 \end{vmatrix}} = \frac{250+j500}{-24+j45} = 10.96\underline{/-54.64^\circ} \quad \text{A}$$

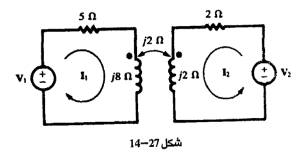
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_\mathbf{Z}} = 3.92\underline{/-118.07 \mp 90^\circ} \quad \text{A}$$

لا تتأثر قيمة Δ_Z بإشارة M وحيث أن محدد البسط للتيار I_1 لا يشمل معاوقة التقارن فإن I_1 نفسه لا يتأثر أيضاً . وتبين علاقة التيار I_2 أن تغيير إشارة التقارن ينتج عنه إزاحة 180° . وإذا لم يوجد جهد إتجاهي آخر فى الحلقة الثانية فإن هذا التغيير فى زاوية الوجه لا ينتج عنه تغيير .

14.11 للدائرة المقارنة المبينة شكل 27-14 أوجد النسبة V_1/V_2 والتى ينشأ عنها تيار I_1 صفراً .

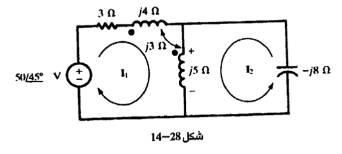
$$\mathbf{I}_1 = 0 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & j2 \\ \mathbf{V}_2 & 2+j2 \end{vmatrix}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

وبالتالى $V_1(2 + j2) - V_2(j2) = 0$ والتى منها $V_2/V_1 = 1 + j1$.



شكل 27–14

14.12 فى الدائرة لشكل 28-14 . أوجد الجهد على طرفى المعاوقة 5 Ω باعتبار الإشارات المبينة .



شكل 28–14

وباختيار تيار الشبيكات المبين فى الشكل فإن :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 45^\circ & j8 \\ 0 & -j3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{vmatrix}} = \frac{150\angle -45^\circ}{109-j9} = 1.37\angle -40.28^\circ \quad A$$

وبالمثل $I_2 = 3.66 \angle -40.28^\circ$ A

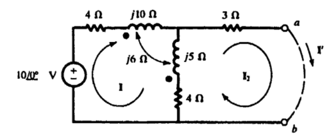
والجهد على طرفى j5 سيكون جزء منه توصيلياً من التيارين I_1 ، I_2 وجزء متبادل من التيار I_1 فى المعاوقة $4\ \Omega$.

$$V = (I_1 + I_2)(j5) + I_1(j3) = 29.27\angle 49.72^\circ \quad V$$

وبالطبع فإن نفس الجهد سيتواجد على طرفى المكثف .

$$V = -I_2(-j8) = 29.27\angle 49.72^\circ \quad V$$

14.13 أوجد الدائرتين المكافئتين لثفنين ونورتون عن الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 29-14 .



شكل 29–14

فى الدائرة المفتوحة فإنه توجد حلقة فى إتجاه عقارب الساعة التى بها التيار I المدفوع بجهد المنبع .

$$I = \frac{10\angle 0^\circ}{8+j3} = 1.17\angle -20.56^\circ \quad A$$

وبالتالى فإن $V' = I(5j + 4) - I(j6) = 40.28^\circ \angle -34\text{-}60^\circ$ V

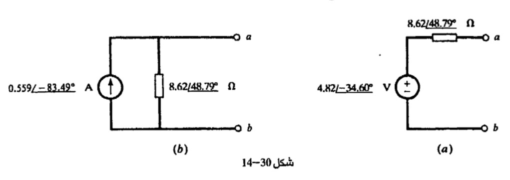
ولإيجاد تيار الدائرة القصيرة I' نعتبر شبيكتى التيار فى إتجاه عقارب الساعة مع $I_2 = I'$.

$$\mathbf{I}' = \frac{\begin{vmatrix} 8+j3 & 10 \\ -4+j1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j3 & -4+j1 \\ -4+j1 & 7+j5 \end{vmatrix}} = 0.559\underline{/-83.39^\circ} \quad \text{A}$$

and

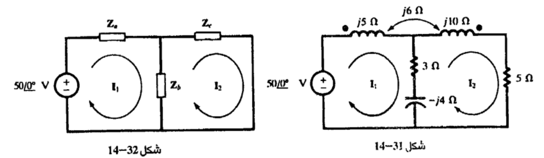
$$\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{I}'} = \frac{4.82\underline{/-34.60^\circ}}{0.559\underline{/-83.39^\circ}} = 8.62\underline{/48.79^\circ} \quad \Omega$$

وبيان الدائرتين المكافئتين فى شكل 14-30 .



شكل 14-30

14.14 أوجد الدائرة الموصلة المتقارنة المكافئة للدائرة المتقارنة مغناطيسياً المبينة شكل 14-31 .



شكل 14-31

شكل 14-32

اختار تيارى الشبيكة I_1 ، I_2 المبينة فى الشكل ثم أكتب معادلات KVL بصورة المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 3+j1 & -3-j2 \\ -3-j2 & 8+j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\underline{/0^\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

نختار المعاوقات شكل 14-32 ليعطى مصفوفة Z المماثلة . هذا لأن كلا من I_1 ، I_2 يمران فى المعاوقة المشتركة Z_b فى إتجاهين متضادين وتكون Z_{12} فى المصفوفة هى $-Z_b$ وبالتالى فإن $Z_b = 3 + j2$ وحيث أن Z_{11} تحتوى على جميع المعاوقات التى يمر بها I_1 فإن :

$$3 + j1 = \mathbf{Z}_a + (3 + j2)$$

والتى منها $Z_a = -j1\ \Omega$ وبالمثل :

$$\mathbf{Z}_{22} = 8 + j6 = \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c$$

وأيضاً $Z_c = 5 + j4\ \Omega$.

14.15 لدائرة المحول شكل (b)11-14 : $k = 0.96$ ، $R_1 = 1.2\ \Omega$ ، $R_2 = 0.3\ \Omega$ ، $X_1 = 20\ \Omega$ ، $X_2 = 5\ \Omega$ ، $Z_L = 5.0\ \angle 36.87°\ \Omega$ ، $V_2 = 100\ \angle 0°\ V$. أوجد emfs E_1 ، E_2 للملف وتيار المغنطة I_ϕ .

$$X_{11} = (1-k)X_1 = (1-0.96)(20) = 0.8\ \Omega \qquad X_{22} = (1-k)X_2 = 0.2\ \Omega$$

$$a = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} = 2 \qquad X_M = k\sqrt{X_1 X_2} = 9.6\ \Omega$$

والآن يمكن إنشاء دائرة كالتى فى شكل (a)11-14 مبتدئاً بالعلاقات المتجهة للجهد والتيار عند الحمل ورجوعاً لقيم E_2 إلى E_1 .

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_L} = \frac{100\angle 0°}{5.0\angle 36.87°} = 20\angle -36.87° \quad \text{A}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_2(R_2 + jX_{22}) + \mathbf{V}_2 = (20\angle -36.87°)(0.3 + j0.2) + 100\angle 0° = 107.2 - j0.4 \quad \text{V}$$

$$\mathbf{E}_1 = a\mathbf{E}_2 = 214.4 - j0.8 \quad \text{V}$$

$$\mathbf{I}_\phi = \frac{\mathbf{E}_2}{jX_M} = -0.042 - j11.17 \quad \text{A}$$

14.16 للمحول الخطى للمسألة 15-14 أحسب معاوقة الدخل على الطرفين حيث نضع الجهد V_1 .

الطريقة 1 :

استكمالاً للتركيب الذى بدأناه فى المسألة 15-14 .

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_\phi + \frac{1}{a}\mathbf{I}_2 = (-0.042 - j11.17) + 10\angle -36.87° = 18.93\angle -65.13° \quad \text{A}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(R_1 + jX_{11}) + \mathbf{E}_1 = (18.93\angle -65.13°)(1.2 + j0.8) + (214.4 - j0.8) = 238.2\angle -3.62° \quad \text{V}$$

وبذلك

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{238.2\angle{-3.62^\circ}}{18.93\angle{-65.13^\circ}} = 12.58\angle{61.51^\circ}\quad \Omega$$

الطريقة 2 :

من (14a) فى المثال 14-5 .

$$\mathbf{Z}_{in} = (1.2 + j0.8) + 2^2 \frac{(j4.8)(0.3 + j0.2 + 5.0\angle{36.87^\circ})}{0.3 + j5.0 + 5.0\angle{36.87^\circ}}$$

$$= \frac{114.3\angle{123.25^\circ}}{9.082\angle{61.75^\circ}} = 12.58\angle{61.50^\circ}\quad \Omega$$

الطريقة 3 :

من (14b) فى المثال 14-5 .

$$\mathbf{Z}_{in} = (1.2 + j20) + \frac{(9.6)^2}{0.3 + j5 + 5.0\angle{36.87^\circ}}$$

$$= (1.2 + j20) + (4.80 - j8.94) = 12.58\angle{61.53^\circ}\quad \Omega$$

14.17 فى شكل 33-14 يوجد ثلاث محولات متطابقة بحيث أن الابتدائى متصلاً على شكل Y والثانوى دلتا . فإذا اتصل به حمل واحد يحمل التيار $I_L = 30\ L0^\circ$ A وكان :

$$\mathbf{I}_{b2} = 20\angle{0^\circ}\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_{a2} = \mathbf{I}_{c2} = 10\angle{0^\circ}\ \text{A}$$

وأيضاً $N_1 = 10N_2 = 100$ فأوجد تيارات الابتدائى I_{a1} ، I_{b1} ، I_{c1} .

نطبق قاعدة الأمبير لفات المنقوطة لكل محول .

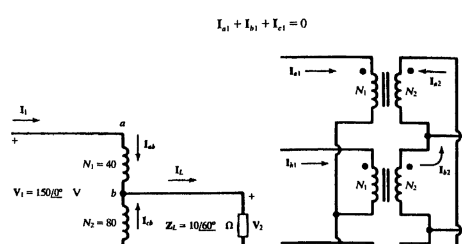
$$N_1\mathbf{I}_{a1} + N_2\mathbf{I}_{a2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \mathbf{I}_{a1} = -\frac{10}{100}(10\angle{0^\circ}) = -1\angle{0^\circ}\ \text{A}$$

$$N_1\mathbf{I}_{b1} - N_2\mathbf{I}_{b2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \mathbf{I}_{b1} = \frac{10}{100}(20\angle{0^\circ}) = 2\angle{0^\circ}\ \text{A}$$

$$N_1\mathbf{I}_{c1} + N_2\mathbf{I}_{c2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \mathbf{I}_{c1} = -\frac{10}{100}(10\angle{0^\circ}) = -1\angle{0^\circ}\ \text{A}$$

وللتأكد من النتائج يمكن الحصول على مجموع تيارات الابتدائى .

$$\mathbf{I}_{a1} + \mathbf{I}_{b1} + \mathbf{I}_{c1} = 0$$



شكل 34–14   شكل 33–14

14.18 للمحول النفسى المثالى المبين شكل 34-14 أوجد V_2 ، I_{cb} وتيار الدخل I_1 .

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1}{a+1} = 100\underline{/0^\circ} \quad \text{V} \qquad \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_L} = 10\underline{/-60^\circ} \quad \text{A}$$

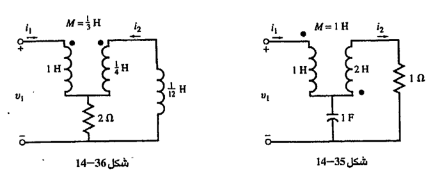
$$\mathbf{I}_{cb} = \mathbf{I}_L - \mathbf{I}_{ab} = 3.33\underline{/-60^\circ} \quad \text{A} \qquad \mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{I}_L}{a+1} = 6.67\underline{/-60^\circ} \quad \text{A}$$

14.19 فى المسألة 18-14 أوجد القدرة الظاهرية المعطاه للحمل بتأثير المحول وتلك المعطاه بالتوصيل .

$$\mathbf{S}_{\text{cond}} = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_{ab}^* = \tfrac{1}{2}(100\underline{/0^\circ})(6.67\underline{/60^\circ}) = 333\underline{/60^\circ} \quad \text{VA}$$

$$\mathbf{S}_{\text{trans}} = a\mathbf{S}_{\text{cond}} = 167\underline{/60^\circ} \quad \text{VA}$$

14.20 للدائـرة المتقارنة شكل 35-14 أوجـد مسامحة الدخل $Y_1 = I_1/V_1$ وحدد التيار $i_1(t)$ للجهد $\upsilon_1 = 2\sqrt{2}\cos t$.



شكل 14-36

شكل 14-35

استخدم KVL حول الحلقتين 1 ، 2 فى مجال s .

$$V_1 = sI_1 + sI_2 + \frac{I_1 - I_2}{s}$$

$$0 = sI_1 + (2s+1)I_2 + \frac{I_2 - I_1}{s}$$

وبحذف I_2 فى هذه المعادلات ينتج :

$$Y_1 = \frac{I_1}{V_1} = \frac{2s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + 5s + 1}$$

وعند $s = j$ فإن مسامحة الدخل $Y_1 = (1+j)/4 = \sqrt{2}/4\ \angle 45^\circ$ وبالتالى $i_1(t) = \cos(t + 45^\circ)$.

14.21 أوجد معاوقة الدخل $Z_1 = V_1/I_1$ فى الدائرة المتقارنة شكل 14-36 .

استخدم KVL حول الحلقتين 1 ، 2 فى مجال s .

$$\begin{cases} V_1 = sI_1 + \frac{1}{3}sI_2 + 2(I_1 + I_2) \\ 0 = \frac{1}{3}sI_1 + \frac{1}{4}sI_2 + 2(I_1 + I_2) + \frac{1}{12}sI_2 \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} V_1 = (2+s)I_1 + (2+\frac{1}{3}s)I_2 \\ 0 = (2+\frac{1}{3}s)I_1 + (2+\frac{1}{3}s)I_2 \end{cases}$$

ويكون الناتج :

$$I_2 = -I_1 \qquad \text{and} \qquad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{2}{3}s$$

التيار المار فى المقاومة هو $I_1 + I_2 = 0$ وليس لها أى تأثير على Z_1 وبذلك فإن معاوقة الدخل حثية خالصة .

مسائل إضافية

14.22 ملفان متقارنان $L_1 = 0.8$ H ، $L_2 = 0.2$ H لهما معامل تقارن $k = 0.90$. أوجد الحث المتبادل M ونسبة الملفات N_1/N_2 . الجواب 0.36 H, 2 .

14.23 ملفان متقارنان $N_1 = 100$ ، $N_2 = 800$ لهما معامل تقارن $k = 0.85$ مع فتح الملف ١ ومرور تيار 0.5 A في الملف 2 كان المجال $\phi_2 = 0.35$ mWb . أوجد L_1 ، L_2 ، M .

الجواب: 0.875 mH, 56 mH, 5.95 mH.

14.24 ملفان متطابقان متقارنان لهما حث مكافئ قيمته 80 mH حينما يتصلان على التوالى بمجال مضاف والقيمة 35 mH حينما يتصلان على التوالى بمجال مضاد . أوجد L_1 ، L_2 ، M ، k .

الجواب: 28.8 mH , 28.8 mH , 11.25 mH , 0.392

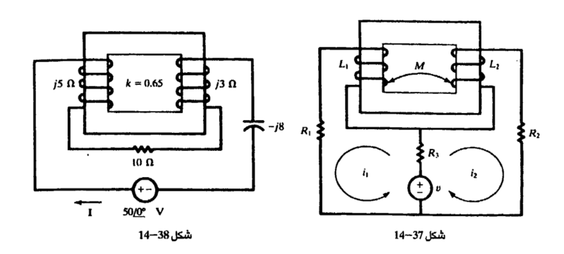
14.25 ملفان متقارنان لهما $L_1 = 20$ mH ، $L_2 = 10$ mH ، $k = 0.50$ متصلان بأربع طرق : توالى مضاف وتوالى مضاد وتوازى مضاف وتوازى مضاد . أوجد الحث المكافئ للأربع توصيلات .

الجواب: 44.1 mH , 15.9 mH , 9.47 mH , 3.39 mH

14.26 أكتب معادلات تيارات الشبيكة للدائرة المتقارنة المبينة شكل 37-14 . أوجد الدائرة المكافئة المنقوطة وأكتب نفس المعادلات .

$$Ans.\quad (R_1 + R_3)i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + R_3 i_2 + M\frac{di_2}{dt} = v$$

$$(R_2 + R_3)i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + R_3 i_1 + M\frac{di_1}{dt} = v$$



شكل 38–14

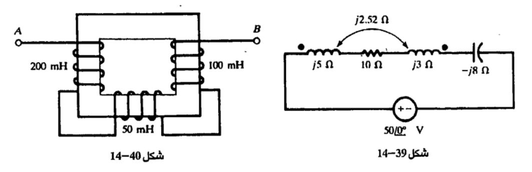
شكل 37–14

14.27 أكتب المعادلة المتجهة للدائرة المتقارنة ذات الحلقة الواحدة لشكل 38-14 .

الجواب: $(j5 + j3 - j5.03 - j8 + 19)\ I = 50\ \underline{/0^\circ}$.

14.28 أوجد الدائرة المكافئة المنقوطة للدائرة المتقارنة لشكل 38-14 .

الجواب: انظر شكل 39-14 .

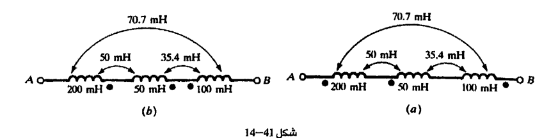


شكل 40–14

شكل 39–14

14.29 للثلاث ملفات المتقارنة المبينة شكل 40-14 معاملات تقارن 0.50 . أوجد الحث المكافئ بين الطرفين AB . الجواب: 2.39 mH

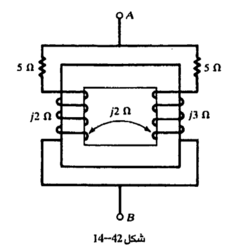
14.30 أوجد شكلين للدائرة المكافئة المنقوطة للملفات المتقارنة المبينة شكل 40-14 . الجواب: انظر شكل 41-14 .



شكل 41–14

14.31 (أ) أوجد المعاوقة المكافئة عند الطرفين AB للدائرة المتقارنة المبينة شكل 42-14 ، (ب) اعكس إتجاه اللف لأحد الملفين وكرر المطلوب فى (أ) .

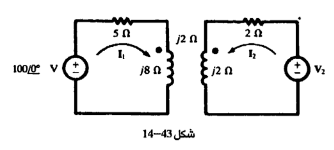
الجواب : (أ) $3.40 \angle 4.166^\circ$ ، (ب) $2.45 \angle 5.37^\circ\ \Omega$



شكل 42–14

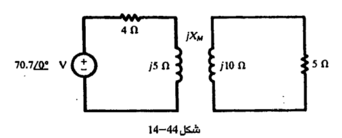
14.32 للدائرة المتقارنة شكل 43-14 . أوجد V_2 حيث $I_1 = 0$. ما هو الجهد على طرفى المعاوقة الحثية $8\ \Omega$ لهذه الحالة .

الجواب : (عند النقطة) $100 \angle 0^\circ$ V ، $141.4 \angle 45^\circ$ V .



شكل 43–14

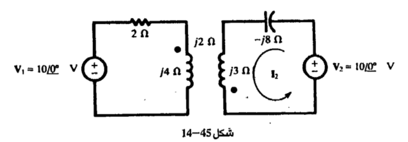
14.33 أوجد الممانعة المتبادلة X_M للدائرة المتقارنـة شـكل 44-14 إذا كانت القدرة المتوسطة فى المقاومة $5\ \Omega$ هى $45.24\ W$. الجواب : $4\ \Omega$.



شكل 44-14

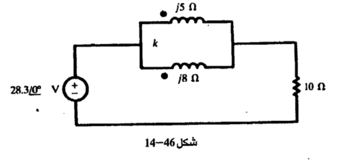
14.34 للدائرة المتقارنة شكل 45-14 . أوجد مركبتى التيار I_2 الناشئ من كل منبع V_1 ، V_2 .

الجواب : $A\ 1.72\ \angle 86.05°$ ، $0.77\ \angle 112.6°\ A$.



شكل 45-14

14.35 أوجـد معامل التقارن k فى الدائرة المبينة شكل 46-14 إذا كانت القدرة فى المقاومة $10\ \Omega$ هى $32\ W$. الجواب : 0.791 .

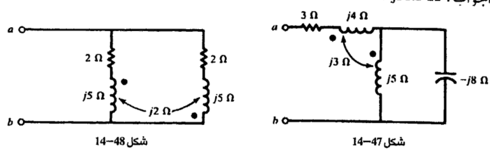


شكل 46-14

14.36 فى (14a) اسـتبدل a ، X_{11} ، X_{22} ، X_M بالعلاقـات بدلالة X_1 ، X_2 ، k وبالتالى راجـع مع (14b) .

14.37 للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-47 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab .

الجواب: $3 + j36.3\ \Omega$.



شكل 14-48

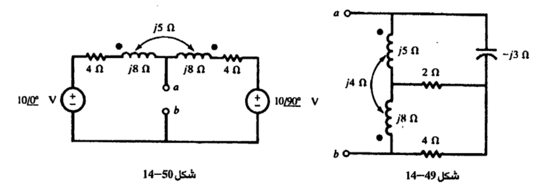
شكل 14-47

14.38 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-48 .

الجواب: $1 + 1.5\ \Omega$.

14.39 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-49 .

الجواب: $6.22 + j4.65\ \Omega$.



شكل 14-50

شكل 14-49

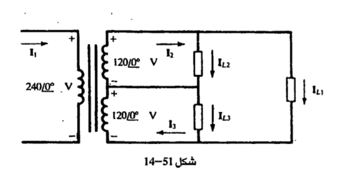
14.40 أوجد الدائرة المكافئة لثفنين ونورتون عند الطرفين ab للدائرة المتقارنة المبينة شكل 14-50 .

الجواب: $V' = 7.07\ \angle 4^\circ\ V$, $I'' = 1.04\ \angle 27.9^\circ\ A$, $Z = 6.8\ \angle 72.9^\circ\ \Omega$.

14.41 للمحول المثالى المبين شكل 14-51 . أوجد I_1 إذا كان

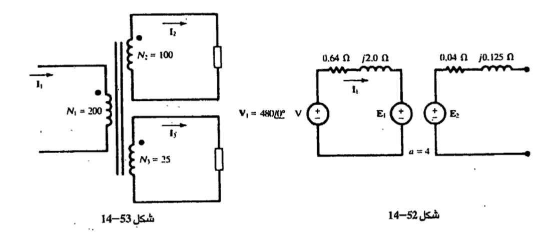
$I_{L1} = 10.0\angle 0^\circ$ A $\qquad I_{L2} = 10.0\angle -36.87^\circ$ A $\qquad I_{L3} = 4.47\angle -26.57^\circ$ A

الجواب: $16.5\ \angle -14.04^\circ$ A



شكل 51–14

14.42 إذا كان الثانـوى للمحول الخطى المبين شـــكل 52-14 مفتوحاً فـــإن تيـــار الابتدائـــى = I_1 $4.0 \angle -89.69°$ A أوجد معامل المقارن k. الجواب : 0.983



شكل 53–14

شكل 52–14

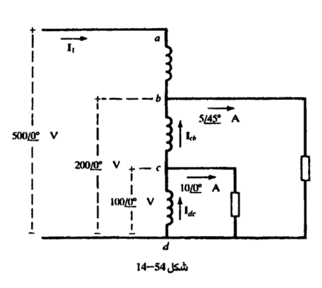
14.43 للمحول المثالى المبين شكل 53-14 أوجد I_1 إذا كان $I_2 = 50 \angle -36.87°$ A ، $I_3 = 16 \angle 0°$ A .

الجواب : $26.6 \angle -34.29°$ A

14.44 باعتبار المحول النفسى المبين شكل 45-14 مثاليا . أوجد التيارات I_1 ، I_{cb} ، I_{dc} .

الجواب : $3.70 \angle 22.5°$ A , $2.12 \angle 68.71°$ A , $10.34 \angle 11.83°$ A

رسم ۵ر۷ سم



شکل 54–14

الفصل الخامس عشر

تحليل الدائرة باستعمال برنامج
محاكاة ذو الدائرة المتكاملة "Pspice, Spice"

15.1 Pspice, Spice

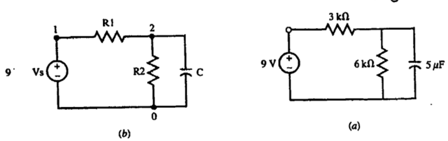
برنامج SPICE (برنامج المحاكاة والدائرة المتكاملة) هو برنامج حاسب أنتج من السبعينيات بجامعة كاليفورنيا ببار كلى وذلك لمحاكاة الدوائر الإلكترونية. وقد استخدم كوسيلة لتحليل وتعميم واختيار الدوائر المتكاملة وكذا بالنسبة لعدد كبير من الدوائر الإلكترونية والكهربية. وبرنامج Spice هو برنامج واسع الانتشار والنسخة التجارية له مثل Pspice لشركة ميكروسم تستخدم نفس الخوارزم والأنظومة مثل Spice ولكنها توفر الدعم التكتيكى والإضافات التى تحتاجها المتطلبات فى مجال الصناعة.

ويقدم هذا الفصل العناصر الأساسية لكل من Spice ، PSpice وتطبيقاتها فى بعض الدوائر البسيطة وقدمت بعض الأمثلة المحلولة بواسطة النسخة المجانية للبرنامج.

15.2 وصف الدائرة

شرح الدائرة موجود بالكامل على شكل مجموعة من الخطوات في ملف مجهز بالناشر ASCIL ويسمى ملف إدخال البيانات. ويمكن أيضاً إدخال البيانات بالرسم بتجهيز الدائرة على شاشة الحاسب بالبرنامج الخاص بذلك من شركة ميكروسيم. ونستعمل فى هذا الفصل ملف الإدخال بالأسم المقترح SOURCE.CIR . ولحل الدائرة يشغل البرنامج على ملف الإدخال. ويقوم الحاسب بإخراج الحل على ملف يسمى ملف الخرج SOURCE.OUT .

مثـــال 15.1 : استخدم PSpice لإيجاد الجهد المستقر للتيار المستمر على طرفي المكثف 5 μF فى شكل 15-1(a) .



شكل 15–1

أولاً نقوم بتسمية العقد بالأرقام 0 ، 1 ، 2 والعناصر بالرموز R_1 ، R_2 ، r بالنسبة V_s [شكل 15-1(b)] . ثم بعد ذلك ينشأ ملف إدخال بيانات الدائرة (Source File) والذى له اسم EXMPI.CIR .

```
DC analysis, Fig. 15-1
Vs      1  0    DC      9 V
R1      1  2    3 k
R2      0  2    6 k
C       0  2    5 uF
.END
```

وبتنفيذ الأمر PSPICE EXMPI فإن الحاسب يحل الدائرة ويكتب النتائج التالية فى الملف EXMP1.OUT .

```
NODE     VOLTAGE     NODE     VOLTAGE
(1)      9.0000      (2)      6.0000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME          CURRENT
Vs            -1.000E - 03
TOTAL POWER DISSIPATION       9.00E - 03   WATTS
```

ويبين الخرج المطبوع أن الجهد عند العقدة 2 بالنسبة للعقدة 1 هو 6V والتيار الداخل لمنبع الجهد V_s هو -10^{-3} A والقدرة الكلية المستهلكة فى الدائرة هى 9×10^{-3} W .

15.3 تحليل ملف إدخال البيانات

ملف الإدخال مثال 15-1 بسيط جداً ويحتوى على البيانات الضرورية لحل الدائرة لشكل 16-1 بواسطة Spice. وكل سطر فى ملف الإدخال يعتبر بياناً. وعموماً إذا كان السطر طويل جداً (أكثر من 80 خانه) فيمكن استكماله فى الأسطر التالية ويجب أن تحتوى أسطر التكملة على الإشارة (+) فى أول عمود.

ولا يفرق PSpice بين الحروف الكبيرة والصغيرة وتستخدم الوحدات القياسية إذا لم يحدد غير ذلك.

العنـــوان

السطر الأول فى ملف المنبع لمثال 15-1 يسمى بيان العنوان. ويستخدم هذا السطر فى برنامج Spice كعنوان لملف الخرج وليس له تأثير فى التحليل. وبالتالى فإنه من الضرورى تحديد هذا السطر للعنوان حتى لو ترك خالياً.

النهايـــة

ويطلب بيان END . عند نهاية ملف الإدخال وأى بيان يتبع كلمة END سيعتبر لملف إدخال منفصل.

البيانـــات

وتبين بصفة كاملة الأربع أسطر الباقية فى ملف الإدخال بيانات لدائرة مثال 15-1. حيث يوضح السطر الثانى جهد المنبع المسمى V_s المتصل بين العقدة 1 (الطرف الموجب للمنبع) وعقدة المقارنة O. والمنبع هو منبع تيار مستمر بالقيمة 9 V. ويبين السطر الثالث أن المقاومة المسماه R_1 ذات القيمة 3 kΩ متصلة بين العقدتين 1 ، 2 وبالمثل فإن السطرين الرابع والخامس يوضحان توصيلة R_2(6 kΩ) ، C (5 µF) على الترتيب بين العقدتين O ، 2 وفى أى دائرة يجب أن تسمى إحدى العقد O لتكون هى عقدة المقارنة وتسمى مجموعة المعلومات والبيانات التى تشرح الشكل العام للدائرة وقيم عناصرها بقائمة (netlist) وسنشرح بيان المعلومة Syntax فى بند 15-4.

التحكم والخـرج

إذا لم توجد أوامر إضافية أخرى وإذا كان البرنامج قائم على بيانات الشبكة فإن برنامج Spice سيقوم بالحساب أتوماتيكيا لحالة التيار المستمر المستقر للمتغيرات التالية :

(i) تقاس جهود العقد بالنسبة للعقدة O .

(ii) التيارات الداخلة لكل منبع جهد .

(iii) القدرة المستهلكة فى الدائرة .

ومع هذا فإنه يمكن أن يحتوى البرنامج على بيانات إضافية للتحكم والخرج فى ملف الإدخال لتعريف متغيرات أخرى (انظر بند 6-15) .

15.4 بيانات الدائرة وتحليل التيار المستمر

العناصر الفعالة

بيانات العناصر R ، L ، C تحتوى على الأقل على ثلاث أجزاء . الجزء الأول يعطى اسم عنصر لمجموعة من الأحرف مبتدئاً بالمقاومة R ثم L أو C على الترتيب . والجزء الثانى يعطى رقم العقد مع فاصل بينها وبين العنصر المتصل بها . والجزء الثالث يعطى قيمة العنصر بالأوم أو الهنرى أو الفاراد مع استخدام مقاييس ونسب المعاملات المعطاه فى جدول 1-15 حسب الحاجة .

جـــدول 15-1

مقاييس المعاملات والرموز

Name	Symbol	Value
femto	f	10^{-15} = 1E–15
pico	p	10^{-12} = 1E–12
nano	n	10^{-9} = 1E–9
micro	u	10^{-6} = 1E–6
milli	m	10^{-3} = 1E–3
kilo	k	10^{3} = 1E3
mega	meg	10^{6} = 1E6
giga	g	10^{9} = 1E9
tera	t	10^{12} = 1E12

ويمكن بالنسبة للجزء الرابع إعطاء الحالات الابتدائية الخاصة باستخدام الصورة IC = xx .

والاصطلاح المتبع لبيان المعلومات هو كالتالى :

[‹الحالات الابتدائية›] ‹القيم› ‹العقد› ‹الاسم›

ويعنى الأقواس المستطيلة أن هذا الجزء ذو بيان اختيارى :

مثـــال 15.2 : أكتب بيانات المعلومات لكل من R ، L ، C المعطاه شكل 15-2 .

المقاومة node 1 — R_{in} = 3 kΩ — node 2

الملف node 4 — L_1 = 30 µH, I(0) = 2 mA — node 5

المكثف node 0 — C_{eq} = 5 pF, V(0) = –2 V — node 6

شكل 15–2

[‹الحالة الابتدائية›]	‹القيمة›	‹العقد›	‹الاسم›	العنصر
	3 k	1 2	Rin	المقاومة
IC = –2 mA	30 uH	5 4	L1	الملف
IC = –2 V	5 pF	6	Ceq	المكثف

السطـر الثالث لتوصيلة المكثف يحـدد عقـدة واحـدة فقط والعقـدة الناقصة تؤخذ دائماً كعقدة مقارنة .

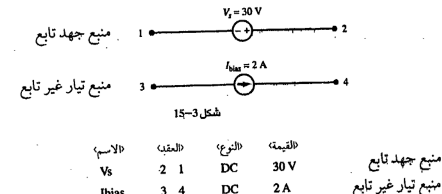
المنابع الغير تابعة

تحدد المنابع الغير تابعة بالتالي :

‹القيمة› ‹النوع› ‹العقد› ‹الاسم›

و‹النوع› لمنابع التيار المستمر والمتردد هى DC ، AC على الترتيب والمنابع الأخرى المرتبطة بالزمن سيتشرح في بند 12-15 وأسماء الجهود والتيارات تبدأ بالحرف V ، I على الترتيب وبالنسبة لمنابع الجهد فإن العقدة الأولى تبين الطرف الموجب ويمر التيار في منبع التيار من العقدة الأولى للثانية .

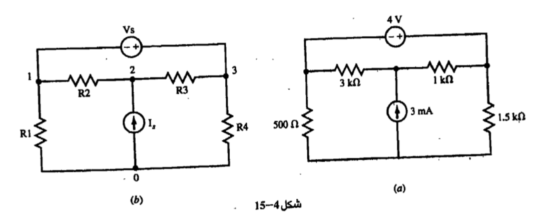
مثــــال 15.3 : أكتب بيانات المعلومات للمنبعين المبينين فى شكل 3-15 .



شكل 3–15

	‹القيمة›	‹النوع›	‹العقد›	‹الاسم›
منبع جهد تابع	30 V	DC	2 1	Vs
منبع تيار غير تابع	2 A	DC	3 4	Ibias

مثــــال 15.4 : أكتب قائمة الشبكة للدائرة المبينة شكل (a)4-15 وننفذ عليه برنامج PSpice لتحليل التيار المستمر .



شكل 4–15

نكتب أولاً أرقام العقد وأسماء العناصر كما فى شكل 15-4(b) فتكون قائمة الشبكة هى:

```
DC Analysis, Fig. 15-4
R1    0  1   500
R2    1  2   3 k
R3    2  3   1 k
R4    0  3   1.5 k
Vs    3  1   DC     4 V
Is    0  2   DC     3 mA
.END
```

وتكتب النتائج فى ملف الخرج كما هو مبين فيما يلى:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	.1250	(2)	5.3750	(3)	4.1250

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME	CURRENT
Vs	−1.500E − 03

المنابع التابعة

توصف المنابع التابعة الخطية بالتالى:

‹الكسب›   ‹التحكم›   ‹العقدة›   ‹الاسم›

يجب أن يبدأ اسم كل منبع بحرف معين طبقاً للقاعدة التالية:

جهد المنبع ذو تحكم فى الجهد Exx .

منبع تيار ذو تحكم فى التيار Fxx .

منبع تيار ذو تحكم فى الجهد Gxx .

منبع جهد ذو تحكم فى التيار Hxx .

ويكون ترتيب العقد مشابهاً للمنابع الغير تابعة وبالنسبة للمنابع ذات التحكم فى الجهود فإن ‹التحكم› هو زوج من العقد حيث يكون فرق الجهد متحكماً فى المنبع باعتبار العقدة الأولى تمثل الطرف الموجب (+) و‹الكسب› هو معامل التناسب.

مثـــال 15.5 : أكتب بيانات المعلومات للمنابع ذات التحكم فى الجهد لشكل 15-5 .

Voltage-controlled voltage source (VCVS)

k_1V_{21}

3 4

2 + V_{21} − 1 Control

Voltage-controlled current source (VCCS)

k_2V_{21}

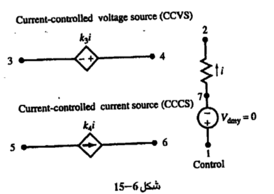
5 6

شكل 15–5

‹المنبع›	‹الاسم›	‹العقد›	‹التحكم›	‹الكسب›
VCVS	E1	4 3	2 1	k1
VCCS	G1	5 6	2 1	k2

وفى حالة المنابع ذات التحكم فى التيار نكتب أولاً القيمة عند الجهد صفر للمنبع (الجهد الكلى V_{dmy}) فى مسار تيار التحكم ونستخدم اسمه كمتغير تحكم .

مثـــال 15.6 : أكتب بيانات المعلومات للمنابع ذات تحكم التيار لشكل 15-6 .



شكل 15–6

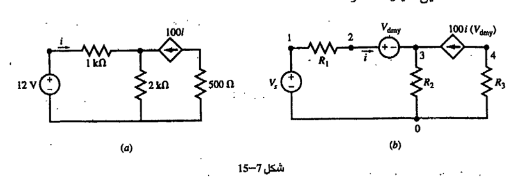
ادخل V_{dmy} مع التيار i الداخل للمنبع عند العقدة 1 .

Vdmy 1 7 DC 0

بيانات المعلومات لمنابع ذات التحكم هى :

‹المنبع›	‹الاسم›	‹العقدة›	‹التحكم›	‹الكسب›
CCVS	H1	4 3	Vdmy	k3
CCCS	F1	5 6	Vdmy	k4

مثـــال 15.7 : أكتب بيانات الشبكة للدائرة المبينة شكل (a)15-7 ونفذ برنامج PSpice عليه فى تحليل التيار المستمر.



شكل 7—15

أكتب أرقام العقد وأسماء العناصر كما فى شكل (b)15-7 وبالتالى فإن قائمة الشبكة تكون :

```
DC analysis with dependent source, Fig. 15-7
Vs      1  0    DC      12
R1      1  2    1k
R2      0  3    2k
R3      0  4    500
Vdmy    2  3    0
F1      4  3    Vdmy    100
.END
```

وبذلك تكون النتائج فى ملف الخرج هى :

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	12.0000	(2)	11.9410	(3)	11.9410	(4)	−2.9557

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME	CURRENT
Vs	−5.911E − 05
Vdmy	5.911E − 05

TOTAL POWER DISSIPATION 7.09E − 04 WATTS

15.5 بيانات التحكم والخرج فى تحليل التيار المستمر

بعض البيانات الخاصة لعمليات التحكم وأشكال الخرج . والأمثلة منها :

OP . تطبع نقطة تشغيل التيار المستمر لجميع المنابع الغير تابعة .

DC . اجتاز قيمة منبع التيار المستمر الغير تابع (أى تأخذ القراءة التالية) والاصطلاح هو :

DC ‹الاسم› ‹القيمة الابتدائية› ‹القيمة النهائية› ‹حجم الخطوة›

.PRINT وهى تطبع قيم المتغيرات والاصطلاح هو :

.PRINT ‹النوع› ‹الخرج المتغير›

‹النوع› وهو DC ، AC أو TRAN (عابر) .

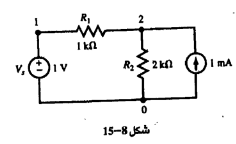
.PLOT وهى لطباعة المتغيرات والاصطلاح هو :

.PRINT ‹النوع› ‹الخرج المتغير›

PROBE وهى لإنشاء ملف بيانات DAT.* والتى يمكن رسمها فى التحليل المتقدم باستثارة البرنامج PROBE والمصطلح هو :

.PROBE [‹الخرج المتغير›]

مثال 15.8 : أوجد قيم V_s فى الدائرة لشكل 8-15 بحيث أن القدرة المستهلكة فى المقاومة 1 kΩ تكون صفراً استخدام الأمر DC . كالمدى V_s من 1 إلى 6 V بخطوات كل منها 1 V واستخدم PRINT لتبين $I(V_S)$ ، V(1,2) ، V(2) .



شكل 8–15

ملف الإدخال هو

```
DC sweep, Fig. 15-8
Vs      1  0     DC      1 V
Is      0  2     DC      1 mA
R1      1  2     1 k
R2      0  2     2 k
.DC     Vs  1    6       1
.PRINT  DC  I(Vs)    V(1,2)     V(2)
.END
```

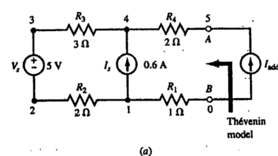
النتائج فى ملف الخرج هى:

DC TRANSFER CURVES

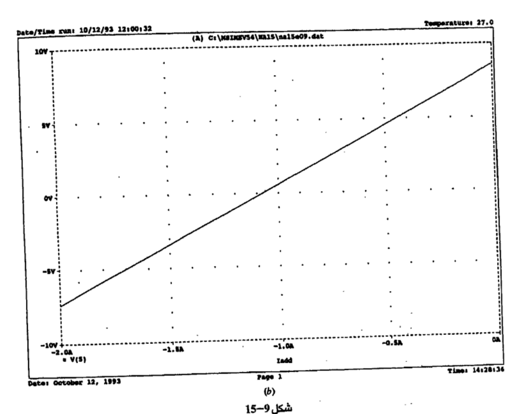
Vs	I(Vs)	V(1,2)	V(2)
1.000E + 00	3.333E − 04	−3.333E − 01	1.333E + 00
2.000E + 00	−1.333E − 12	1.333E − 09	2.000E + 00
3.000E + 00	−3.333E − 04	3.333E − 01	2.667E + 00
4.000E + 00	−6.667E − 04	6.667E − 01	3.333E + 00
5.000E + 00	−1.000E − 03	1.000E + 00	4.000E + 00
6.000E + 00	−1.333E − 03	1.333E + 00	4.667E + 00

الجواب: $V_s = 2$ V .

مثـــــال 15.9 : أكتب ملف الإدخال للدائرة المبينة شل 15-9(a) باستخدام الأوامر .DC ، .PLOT ، .PROBE. ولإيجاد معادلة الخواص I-V لتغير قيم I من O إلى -2A عند الطرفين AB .



(a)



(b)

شكل 9-15

نوصل أولاً منبع تيار مستمر I_{add} عند الطرفين AB وندخل التيار I قيمة (أى تأخذ قراءات متتالية) من O إلى 2A- باستخدام الأمر DC. ونرسم قيم V مع I . وحيث أن الدائرة خطية فإنه يكفى الحصول على نقطتين للرسم . ومع هذا فإنه لتوضيح الرسم فإننا نستخدم عشر نقط من ملف الإدخال كالتالى :

```
Terminal Characteristic, Fig. 15-9
Iadd      0  5      DC              0
Is        0  4      DC              0.6 A
Vs        3  2      DC              5 V
R1        0  1      1
R2        1  2      2
R3        3  4      3
R4        4  5      2
.DC       Iadd      0        -2     0.2
.PLOT     DC        V(5)
.PROBE
.END
```

والخرج مبين فى شكل (b)9-15 . ومعادلة I-V هى $V = 8I + 8.6$.

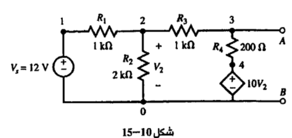
15.6 مكافئ ثفنين

الأمر TF.

يعطى الأمر TF. دالة التحويل من متغير الدخل إلى متغير الخرج وينتج عن ذلك المقاومات من ناحية المنبعين وبالتالى يمكن إيجاد مكافئ ثفنين للدائرة ذات المقاومة . والاصطلاح هو :

‹الدخل المتغير›　　　‹الخرج المتغير›　TF.

مثـــال 15.10 : استخدم الأمر TF. لإيجاد مكافئ ثفنين للدائرة من ناحية الطرفين AB لشكل 15-10 .



شكل 10–15

أرقام العقد وأسماء العناصر مبينة على شكل 10-15 . ملف الإدخال هو :

```
Transfer Function in Fig. 15-10
Vs      1  0      DC      12
E1      4  0      2  0    10
R1      1  2      1 k
R2      2  0      2 k
R3      2  3      1 k
R4      3  4      200
.TF     V(3)  Vs
.END
```

ويحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
NODE  VOLTAGE   NODE  VOLTAGE   NODE  VOLTAGE    NODE  VOLTAGE
(1)   12.0000   (2)   -2.0000   (3)   -17.0000   (4)   -20.000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        -1.400E-02

TOTAL POWER DISSIPATION    1.68E-01  WATTS

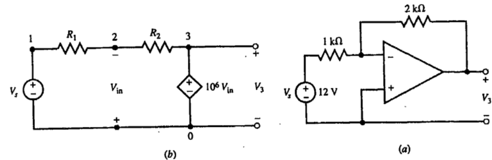
SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(3)/Vs = -1.417E+00
INPUT RESISTANCE AT Vs = 8.571E+02
OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = -6.944E+01
```

وبالتالى فإن $R_{Th} = -69.44\ \Omega$ ، $V_{Th} = -1.417\ (12) = -17\ V$.

15.7 دوائر مكبر التشغيل OP AMP

يمكن تمثيل مكبر التشغيل بمنابع الجهد ذات معاوقة دخل كبيرة وكسب جهد متحكم كبير ويمكن تكرار التمثيل عند استخدامه أكثر من مرة .

مثـــال 15.11 : أوجد دالة التحويل V_3/V_s فى دائرة مكبر التشغيل المثالى شكل 15-11(a) .



شكل 15-11

يمكن استبدال مكبر التشغيل بجهد منبع جهد مطلق ذو الكسب 10^6 [انظر شكل 15-11(b)] .

```
Inverting op amp circuit, Fig. 15-11
Vs      1  0     DC     12
E1      3  0     0  2   1E6
R1      1  2     1k
R2      2  3     2k
.TF     V(3)  Vs
.END
```

نكتب دالة التحويل فى ملف الخرج .

```
NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE     NODE    VOLTAGE
(1)     12.0000    (2)     24.00E-06   (3)     -24.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME       CURRENT
Vs         -1.200E-02

TOTAL POWER DISSIPATION    1.44E-01   WATTS

SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(3)/Vs = -2.000E+00
INPUT RESISTANCE AT Vs = 1.000E+03
OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = 0.000E+00
```

الأمر SUBCKT.

تعرف الدائرة الفرعية بمجموعة البيانات تبدأ بما يلى :

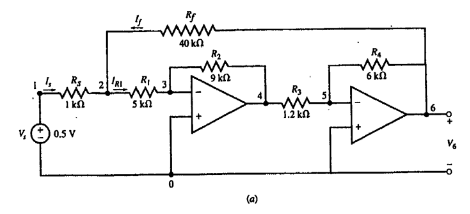
‹الأطراف الخارجية› ‹الاسم› SUBCKT.

وتنتهى بالأمر ENDS. ومن خلال قائمة الشبكة نرمز للدائرة الفرعية كالتالى :

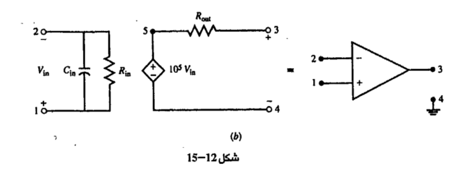
‹العقد› ‹الاسم› X_{aa}

وبالتالى فإن الأمر SUBCKT. ويمكن أن يحدد اسماً فى تمثيل مكبر العمليات لتكراره أكثر من مرة .

مثال 15.12 إذا أعطيت الدائرة المبينة شكل 15-12(a) أوجد I_s ، I_R ، V_2 ، لقيم V_s من 0.5 إلى 2 V بخطرة قيمتها 0.5 V مستخدماً مكبر عملى [شكل 15-12(b)] مع $R_{in} = 100\ k\Omega$ ، $C_{in} = 10$ pf ، $R_{out} = 10\ k\Omega$ وكسب الدائرة المفتوحة 10^5 .



(a)



(b)

شكل 15–12

يستخدم ملف الإدخال للدائرة الفرعية المسماه OPAMP لشكل 15.12(b) الذى يبدأ توصيفه بالأمر SUBCKT. وينتهى بالأمر ENDS. والبيانان X1 ، X2 يصفان مكبرا العمليات بالرجوع للدائرة الفرعية للمكبر OPAMP. لاحظ الترابط بين توصيلات العقد فى X1 ، X2 مع تلك الخاصة بالأطراف الخارجية المبينة فى بيان SUBCKT. ويكون ملف الإدخال هو :

دائرة مكبر عمليات فى شكل 12-15 باستخدام SUBCKT.

```
.SUBCKT      OPAMP           1  2  3  4
Rin     1  2          10 E5
Cin     1  2          10 pF
Rout    3  5          10 k
Eout    5  4          1  2     10 E5
.ENDS
Vs      1  0          DC
Rs      1  2          1 k
R1      2  3          5 k
R2      3  4          9 k
R3      4  5          1.2 k
R4      5  6          6 k
Rf      6  2          40 k
X1      0  3    4  0  OPAMP
X2      0  5    6  0  OPAMP
.DC     Vs      0.5   2    0.5
.PRINT  DC      V(2)  V(6)   I(Vs)   I(R1)   I(Rf)
.TF     V(6)    Vs
.END
```

ويكون ملف الخرج هو :

منحنيات التحويل للتيار المستمر

Vs	V(2)	V(6)	I(Vs)	I(R1)	I(Rf)
5.000E − 01	5.000E − 01	4.500E + 00	−3.372E − 09	1.000E − 04	9.999E − 0
1.000E + 00	1.000E + 00	9.000E + 00	−6.745E − 09	2.000E − 04	2.000E − 0
1.500E + 00	1.500E + 00	1.350E + 01	−1.012E − 08	3.000E − 04	3.000E − 0
2.000E + 00	2.000E + 00	1.800E + 01	−1.349E − 08	4.000E − 04	4.000E − 0

NODE	−00.00E − 00	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	.5000	(2)	.5000	(3)	9.400E − 06	(4)	−.9000
(5)	−13.00E − 06	(6)	4.4998	(X1.5)	−9.3996	(X2.5)	12.9990

تيارات منابع الجهد.

التيار	الاسم
−3.372E − 09	Vs

القدرة الكلية المستهلكة 1.69E - 09 WATS

خواص الإشارة الصغيرة

مقاومة الدخل عند V_S = 1.483E + 08

مقاومة الخرج عند V(6) = 7.357E - 02

لا يوجد فقد فى الجهد على طرفى R_S . وبالتالى فإن $V(2) = V_s$ ويكون الكسب الكلى $g = V(2)/V_s = V(6)/V_s$ ويوجه التيار المسحوب بالمقاومة R_I إلى مقاومة التغذية الخلفية R_F .

15.8 الحالة المستقرة للتيار المتردد وتجاوب التردد

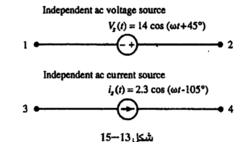
منابع التيار المتردد الغير تابعة

توصف منابع التيار المتردد الغير تابعة ببيان له الاصطلاح التالى :

‹زاوية الوجه بالدرجات›   ‹القيمة› AC   ‹العقد›   ‹الاسم›

تبدأ منابع الجهد بالحرف V ومنابع التيار بالحرف I ويكون الإتجاه مثل المتعارف عليه فى منابع التيار المستمر .

مثـــال 15.13 : أكتب بيانات المنابع المبينة شكل 15-13 .



شكل 15–13

منبع AC	‹الاسم›	‹العقد›	‹النوع›	‹القيمة›	‹الوجه›
Voltage.	Vs	2 1	AC	14	45
Current	Is	3 4	AC	2.3	−105

الأمر AC.

الأمر AC. يقوم بتغير (أخذ قراءات) التردد لجميع منابع التيار المتردد فى الدائرة فى المدى المطلوب أو أن يجعلها عند القيمة مطلوبة والاصطلاح هو :

‹النهاية f› ‹البداية f› ‹عدد النقط› ‹نوع التغير› AC.

والحالة المستقرة للتيار المتردد ‹نوع التغبر› هو خطى (LIN.) وللحصول على تردد وحيد للإشارة فإن ترددات البداية والنهاية تضبط بالقيمة المطلوبة ويؤخذ عدد النقط مساوياً للواحد .

الأمر PRINT AC. والأمر PLOT AC.

الأمر PRINT AC. يطبع القيمة وزاوية الوجه للخرج فى الحالة المستقرة . والاصطلاح هو :

‹الوجه› ‹القيمة› PRINT AC.

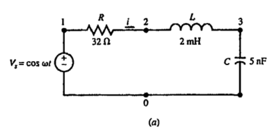
القيمة وزوايا الوجه للجهود هى V_m ، V_p المتغيران على الترتيب والقيم والأوجه بالنسبة للتيارات هما I_m ، I_p المتغيران على الترتيب والاصطلاح PLOT AC. مشابه لذلك بالنسبة للأمر PRINT AC.

مثـــال 15.14 : فى دائرة التوالى RLC لشكل (a)14-15 غير تردد المنبع من 40 إلى 60 kHz فى 200 خطوة . أوجد القيمة وزاوية الوجه للتيار I باستخدام PLOT. PROBE.

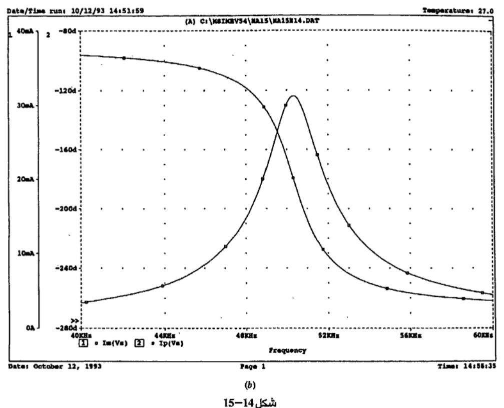
ملف الادخال هو :

```
AC analysis of series RLC, Fig. 15-14
Vs      1 0        AC        1 0
R       1 2        32
L       2 3        2m
C       3 0        5n
.AC     LIN        200       40k  60k
.PLOT   AC   Im(Vs)   Ip(Vs)
.PROBE  Vm(1,2)   Vm(2,3)   Vm(3)   Im(Vs)   Ip(Vs)
.END
```

شكل تجاوب التردد مرسوم فى شكل (b)14-15 . بالأمر Prob.



(a)



(b)

شكل 14—15

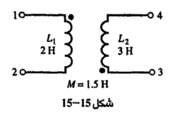
15.9 الحث المتبادل والمحولات

يمثل الحث المتبادل بين الملفات بنبيطة يسبق اسمها بحرف k ومصطلح بيان المعلومة هو :

‹معامل المتقارن›   ‹ملف 2›   ‹ملف 1›   ‹الاسم›

ولا بد من مـلاحظة قاعـدة النقطة والتى تحـدد إشـارة حـد الحث المتـبادل وذلك بوضع الأطراف المنقوطة على كل ملف هو أول عقدة لدخول بيان المعلومات .

مثـــال 15-5 أكتب البيانات الثلاثة التى تشرح الملفات المتقارنة لشكل 15-5 .



شكل 15–15

معامل التقارن هو $k12 = 1.5\ \sqrt{2(3)} = 0.61$ وقائمة الشبكة تحتوى على التالى :

```
L1     1   2     2
L2     3   4     3
K12    L1  L2    0.61
```

مثـــال 15.16 : ارسم معاوقة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$ فى الدائرة المبينة شكل 15.16(a) لقيم F المتغيرة من 0.01 إلى 1 Hz .

لإيجاد Z_{in} نصل منبع تيار متردد 1-A من العقدة O إلى العقدة 1 ثم ارسم القيمة وزاوية الوجه للجهد V(1) بينهما . ملف الإدخال هو :

```
AC analysis of coupled coils, Fig. 15-16
IADD      0    1      AC         1      0
C         0    1      1 000 000 uF
R         0    2      3
L1        1    2      2 H
L2        3    2      5 H
K12       L1   L2     0.6325 H
L3        0    3      1 H
.AC       LIN         20   .01   1
.PRINT    AC     Vm(1)     Vp(1)
.PROBE
.END
```

Vm(1) ، Vp(1) وهما القيمة وزاوية الوجه للمعاوقة Z_{in} وقد رسمت باستخدام Prob الرسم مبين فى شكل 15-16(b) . لاحظ أن القيمة العظمى تحدث عند 100 mHz تقريباً .

15.10 تمثيل النبائط ذات القيم المتغيرة

الأمر MOBEL.

عوامل العنصر الغير فعال يمكن تغييرها باستخدام الأمر MODEL. والاصطلاح هو :

[‹القيمة› = ‹المعامل›] ‹النوع› ‹الاسم› MODEL.

حيث ‹الاسم› هو الاسم الموضوع للعنصر بالنسبة للعناصر الغير فعالة الخطية فإن ‹النوع› هو :

للمقاومة RES

للملف IND

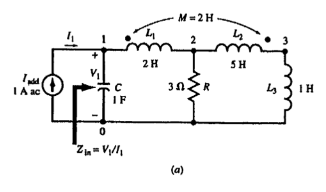
للمكثف CAP

ويمكن تغيير القيم الخاصة بالنموذج من خلال المدى المطلوب وعلى أساس خطوات معروفة باستخدام الأمر STEP .

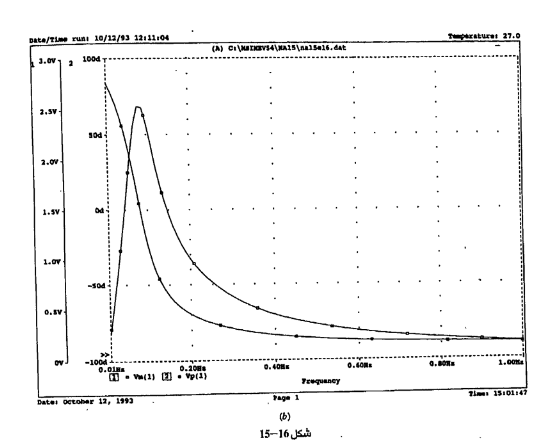
‹حجم الخطوة› ‹القيمة النهائية› ‹القيمة الابتدائية› ‹الاسم› STEP LIN.

وفيما يلي مثال باستخدام الأمرين MODEL. ، STEP. لتعريف مقاومة سخان ذات مقاومة تتغير من 20 إلى 40 Ω من خلال خمس خطوات ينتج عنها القيم 20 ، 25 ، 30 ، 35 ، 40 .

```
.MODEL    heater    RES(R = 20)
.STEP     RES       heater(R)    20    40    5
```



(a)



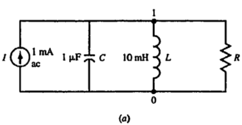
(*b*)

شكل 15–16

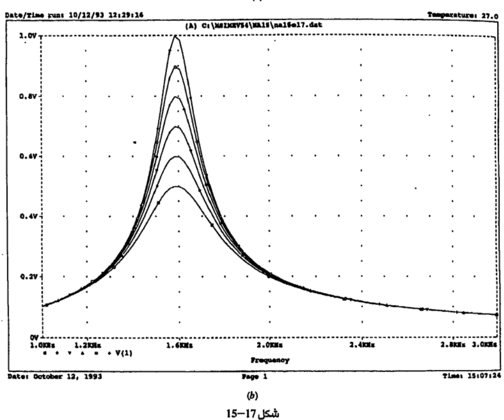
مثـــال 15.17 : استخدم الأمر Probe. لرسم V فى الدائرة شكل (a)17-15 لقيم f المتغيرة من 1 إلى 3 kHz فى 100 خطوة وأيضاً R من 500 Ω إلى 1 kΩ بخطوات كل منها 100 Ω .

باستخدام الأمر MODEL. نوجد المقاومة RLeak ونقوم بتغير قيمتها باستخدام STEP. وفى الإدخال التالى ويرسم شكل تجاوب الجهد V مع f باستخدام Prob وهو مبين فى شكل (b)17-15 .

```
Parallel resonance with variable R, Fig. 15-17
I        0  1     AC         1 m  0
R        1  0     RLeak      1
L        1  0     10 m
C        1  0     1 u
.MODEL   RLeak    RES(R = 1)
.STEP    LIN      RES        RLeak(R)   500   1 k   100
.AC      LIN      100   1 k  3 k
.PROBE
.END
```



(a)



(b)

شكل 17–15

15.11 تجاوب الزمن والتحليل العابر

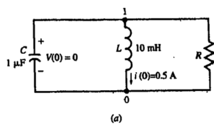
الأمر TRAN.

يمكن إيجاد تجاوبات الزمن مثل التجاوبات الطبيعية للحالات الابتدائية فى الدوائر الخالية من المنبع والتجاوبات للدخول السلّمية والدفعية والأسية أو أى أنواع أخرى تعتمد على الزمن وذلك بالأمر TRAN. ويبدأ عند $t = 0$ وتحدد قيمة الزيادة وكذا الزمن النهائى كما يلى :

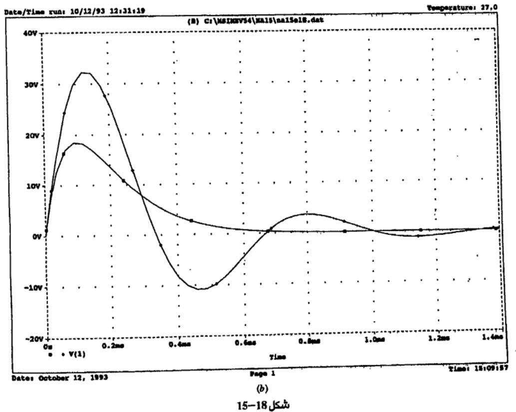
‹قيمة الزمن النهائى›   ‹قيمة الزيادة›   TRAN.

مثـــال 15.18 : استـخدم TRAN. ، PROBE. وذلك لرسم دائرة التـوازى RLC المبـينة شكل 15-18(a) وذلك لقيم R = 50 Ω ، 150 Ω لقيم 0 < t < 1.4 ms والحالات الابتدائية I(0) = 0.5 A ، V(0) = 0 .

ملف الإدخال



(a)



(b)

شكل 15–18

دائرة توازى بدون منبع بها R متغيرة .

```
R        1 0      LOSS       1
L        0 1      10m        IC = .5
C        1 0      1u         IC = 0
.MODEL   LOSS     RES(R = 6)
.STEP    RES      LOSS(R)    50   150   100
.TRAN    2.0E-6   1.4E-3     UIC
.PROBE
.END
```

يبين شكل (b)15-18 رسم الجهد مرسوماً بالراسم . لقيم R = 500 ولا توجد تذبذبات .

15.12 توصيف أنواع أخرى من المنابع

المنابع المرتبطة بالزمن والتى تحتوى على مركبات تيار مستمر وتيار متردد وكميات عابرة يعبر عنها بالتالى :

‹المركبة العابرة›   ‹مركبة التيار المتردد›   ‹مركبة التيار المستمر›   ‹العقد›   ‹الاسم›

وإذا لم تحدد قيم المركبة المستمرة أو المتغيرة فإن البرنامج يأخذ صفراً ، فى حين أن المركبة العابرة تظهر عند $t > 0$ وفيما يلى وصف للعديد من المركبات العابرة .

المنبع الأسى

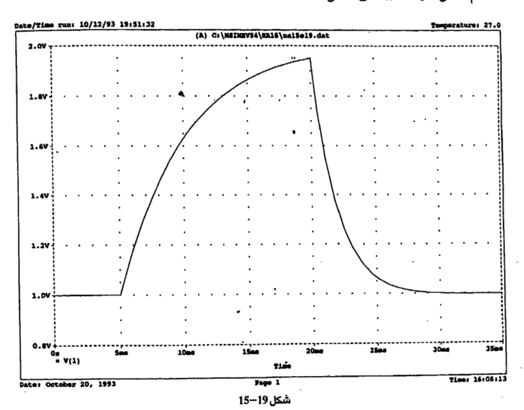
يبدأ المنبع عند قيمة ابتدائية ثابتة V_0 وعند t_0 يتغير أسياً من V_0 إلى V_1 بثابت زمنى (tau 1) وعند $t = T$ يعود أسياً للقيمة V_0 ثابت زمنى آخر تاو 2 (tau 2) والمصطلح هو :

$$\text{EXP}(V_0 \quad V_1 \quad t_0 \quad \text{tau1} \quad T \quad \text{tau2})$$

مثـــال 15.19 : يبدأ منبع جهد تيار مستمر 1 V فى الزيادة أسياً عند t = 5 ms بثابت زمنى 5 ms ويصل إلى 2 V وبعد 15 ms يبدأ التناقص للقيمة 1 V بثابت زمنى 2 ms . أكتب بيان للمنبع واستخدم الراسم لرسم شكل الموجه .

```
.Vs   1 0   EXP(1  2  5m  5m  20m  2m)
```

رسم شكل الموجه المبينة فى شكل 15-19 .



شكل 19—15

منبع النبضة

يمكن تمثيل شكل الموجه للنبضة الدورية والذى يتغير من V_0 إلى V_1 ويعود مرة أخرى كالتالى :

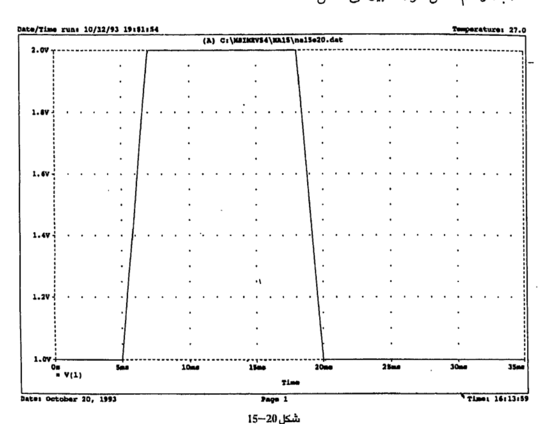
(الدورة الفترة زمن الهبوط زمن الصعود التأخير V_p V_0) النبضة

مثـــال 15.20 : (أ) أكتب بيانات لموجة نبضة التى تتغير عشرة مرات فى الثانية بين القيم 1 V ، 2 V بزمن صعود وهبوط 2 ms وتستغرق الدفعة عند 2 V لمدة 11 ms وتبدأ النبضة الأولى عند t = 5 ms . (ب) استخدم الرسم وارسم شكل الموجه التى فى (أ) .

(أ) بيان المعلومات هو :

Vs 1 0 PULSE(1 2 5m 2m 2m 11m 100m)

(ب) رسم شكل الموجه مبين فى شكل 15-20 .



شكل 15—20

المنبع الجيبى

يبدأ المنبع عند قيمة ابتدائية ثابتة V_0 وعند t_0 يضاف إليها المركبة الأسية المتناقصة الجيبية ذات التردد F وزاوية الوجه وقيمة البداية V_1 ومعامل التناقص الفا (alpha) واصطلاح شكل الموجه هو :

$$SIN(V_0 \quad V_1 \quad f \quad t_0 \quad alpha \quad phase)$$

مثـــال 15.21 : (أ) أكتب التعبير الرياضى وبيان المعلومات لمنبع جهد تيار مستمر 1 V والمضاف إليه جهد جيبى بتردد 100 Hz بزاوية وجه صفر عند الزمن t = 5 ms . القيمة العظمى للموجه الجيبية 2 V وتتناقص إلى الصفر بثابت زمنى 10 ms . (ب) باستخدام الراسم ارسم Vs(t) .

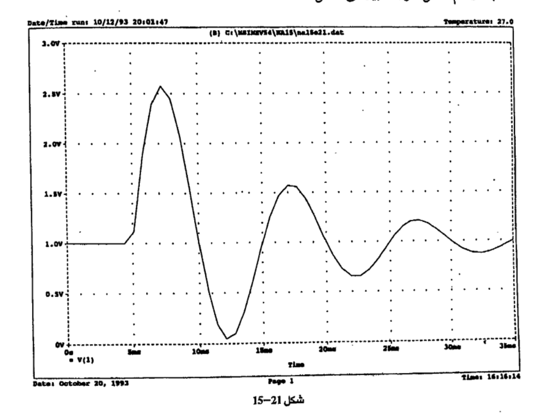
(أ) معامل التناقص هو مقلوب ثابت الزمن ويساوى ألفا (alpha) = 100 = 1/0.01 لقيم $t > 0$ يكون الجهد رياضياً.

$$V_s(t) = 1 + 2e^{-100(t-0.005)} \sin 628.32(t - 0.005)u(t - 0.005)$$

بيان المعلومات هو

```
Vs    1  0    SIN(1  2  100  5m  100)
```

(ب) رسم شكل الموجه مبين فى شكل 21-15 .



شكل 21–15

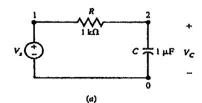
مثـــال 15.22 : أوجد الجهد على طرفى مكثف 1 µF بشحنة ابتدائية صفر والمتصل بمنبع جهد من خلال مقاومة 1 kΩ كما هو مبين شكل 15-22(a) بيان منبع الجهد كالتالى :

$$V_s = \begin{cases} 15.819\ \text{V} & \text{for } 0 < t < 1\ \text{ms} \\ 10\ \text{V} & \text{for } t > 1\ \text{ms} \end{cases}$$

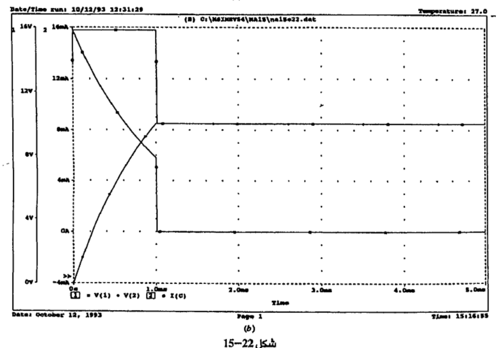
نستخدم الشكل الأسى للموجه لتمثيل V_S والملف هو .

```
Dead-beat Pulse-Step response of RC
Vs      1  0      EXP(10  15.819  0  1.0E-6  1.0E-3  1.0E-6)
R       1  2      1k
C       2  0      1uF
.TRAN   1.0E-6    5.0E-3    UIC
.PROBE
.END
```

شكل (b)15-22 يبين رسم جهد المكثف وعند 0 < t < 1 ms فإن التجاوب الدفعى يتزايد أسياً نحو قيمة التيار المستمر المستقرة 15.819 V . وعند t = 1 ms فإن التجاوب يصل إلى القيمة 10 V . وأيضاً عند t = 1 ms فإن جهد المنبع يتناقص إلى 10 V وحيث أن جهدى المنبع والمكثف متساويان فإن التيار فى المقاومة يصبح صفراً ونصل إلى الحالة المستقرة وبذلك يستمر التجاوب العابر لمدة 1 ms فقط .



(a)



(b)

شكل 22–15

15.13 ملخــص

بالإضافة للعناصر الخطية والمنابع المستخدمة في البنود السابقة فإنه يمكن الإضافة إلى قائمة الشبكة البنائط الغير خطية مثل الموحدات (Dxx) والترنزسترات ذات التأثير المجالى (Jxx) والموسفت (mosfat) (Mxx) وخطوط الإرسال (Txx) والمفاتيح ذات التحكم فى الجهد (Sxx) والمفاتيح ذات التحكم في التيار (Wxx) . ويمكن عمل تحليل الحساسية باستخدام البيان SENS. ويمكن عمل تحليل فورير باستخدام الأمر FOUR. ويمكن الحصول عليها من الكتب أو دليل البرامج Pspice ، Spice وفيما يلى ملخص للبيانات المستخدمة فى هذا الفصل .

بيانات الأوامر

R, L, C	⟨name⟩	⟨nodes⟩	⟨value⟩	[⟨initial conditions⟩]	
Mutual Inductance	kxx	⟨ind.a⟩	⟨ind.b⟩	⟨coupling coefficient⟩	
Subcircuit Call	Xxx	⟨name⟩	⟨connection nodes⟩		
DC Voltage source	Vxx	⟨nodes⟩	DC	⟨value⟩	
DC Current Source	Ixx	⟨nodes⟩	DC	⟨value⟩	
AC Voltage source	Vxx	⟨nodes⟩	AC	⟨magnitude⟩	⟨phase⟩
AC Current source	Ixx	⟨nodes⟩	AC	⟨magnitude⟩	⟨phase⟩
VCVS	Exx	⟨nodes⟩	⟨control⟩	⟨gain⟩	
CCCS	Fxx	⟨nodes⟩	⟨control⟩	⟨gain⟩	
VCCS	Gxx	⟨nodes⟩	⟨control⟩	⟨gain⟩	
CCVS	Hxx	⟨nodes⟩	⟨control⟩	⟨gain⟩	

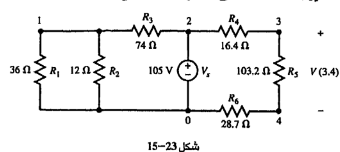
أوامر التحكم

.AC	⟨sweep type⟩	⟨number of points⟩	⟨starting f⟩	⟨ending f⟩	
.DC	⟨name⟩	⟨initial value⟩	⟨final value⟩	⟨step size⟩	
.END					
.ENDS					
.IC	⟨V(node) = value⟩				
.MODEL	⟨name⟩	⟨type⟩ [(⟨parameter⟩ = ⟨value⟩)]			
		⟨type⟩ is RES for resistor			
		⟨type⟩ is IND for inductor			
		⟨type⟩ is CAP for capacitor			
.LIB	[⟨file name⟩]				
.OP					
.PRINT	DC	⟨output variables⟩			
.PLOT	DC	⟨output variables⟩			
.PRINT	AC	⟨magnitudes⟩	⟨phases⟩		

```
.PLOT      AC     ⟨magnitudes⟩   ⟨phases⟩
.PRINT     TRAN   ⟨output variables⟩
.PROBE     [⟨output variables⟩]
.STEP LIN  ⟨type⟩  ⟨name(param.)⟩  ⟨initial value⟩  ⟨final value⟩  ⟨step size⟩
.SUBCKT    ⟨name⟩  ⟨external terminals⟩
.TF        ⟨output variable⟩   ⟨input source⟩
.TRAN      ⟨increment size⟩    ⟨final value⟩
```

مسائل محلولة

15.1 استخدم PSpice لإيجاد V (3, 4) فى الدائرة المبينة شكل 15-23 .



شكل 15-23

ملف الإدخال هو :

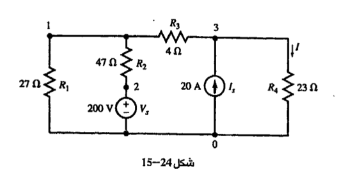
```
DC analysis, Fig. 15-23
Vs      2    0     DC      105 V
R1      0    1     36
R2      0    1     12
R3      1    2     74
R4      2    3     16.4
R5      3    4     103.2
R6      4    0     28.7
.DC     Vs   105   105     1
.PRINT  DC   V(1)  V(3, 4)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على :

```
DC TRANSFER CURVES
Vs            V(1)          V(3, 4)
1.050E + 02   1.139E + 01   7.307E + 01
```

وبذلك فإن V (3, 4) = 73.07 V .

15.2 أكتب ملف الإدخال لدائرة شكل 15-24 وأوجد I فى R_4 .



شكل 24–15

ملف الإدخال هو :

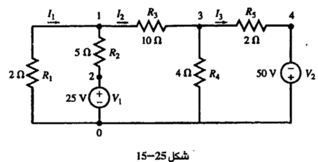
```
DC analysis, Fig. 15-24
Vs       2    0    DC      200 V
Is       0    3    DC      20 A
R1       0    1    27
R2       1    2    47
R3       1    3    4
R4       3    0    23
.DC      Vs   200  200  1
.PRINT   .DC  I(R4)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
Vs            I(R4)
2.000E + 02   1.123E + 01
```

التيار $I(R_4) = 11.23$ A يمر من العقدة 3 إلى العقدة 0 طبقاً لترتيب العقد فى ملف الدخل للمقاومة R_4 .

15.3 : أوجد الثلاث تيارات الحلقية فى الدائرة لشكل 25-15 باستخدام PSpice وقارن الحل مع الحل الرياضى.



شكل 25–15

ملف الدخل هو :

```
DC analysis, Fig. 15-25
V1       2    0       DC      25
V2       0    4       DC      50
R1       0    1       2
R2       1    2       5
R3       1    3       10
R4       3    0       4
R5       3    4       2
.DC      V1   25      25      1
.PRINT   DC   I(R1)   I(R3)   I(R5)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على التالى :

```
DC TRANSFER CURVES
V1            I(R1)          I(R3)         I(R5)
2.500E + 01   -1.306E + 00   3.172E + 00   1.045E + 01
```

يحتاج الحل الرياضى لحل ثلاث معادلات آنية .

15.4 باستخدام PSpice أوجد قيمة V_s فى شكل 4-15 بحيث لا يغذى منبع الجهد أى قدرة .

نقوم بتغيير V_s من 1 إلى 10 V وبذلك فإن ملفى الدخل والخرج يكونان :

```
DC sweep in the circuit of Fig. 15-4
R1       0    1       500
R2       1    2       3 k
R3       2    3       1 k
R4       0    3       1.5 k
Vs       3    1       DC     4 V
Is       0    2       DC     3 mA
.DC      Vs           1      10     1
.PRINT   DC   I(Vs)
.PROBE
.PLOT    DC   I(Vs)
.END
```

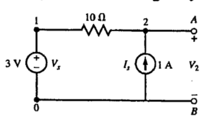
يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
DC TRANSFER CURVES
Vs            I(Vs)
1.000E + 00    7.500E - 04
2.000E + 00   -2.188E - 12
3.000E + 00   -7.500E - 04
```

```
4.000E + 00     -1.500E - 03
5.000E + 00     -2.250E - 03
6.000E + 00     -3.000E - 03
7.000E + 00     -3.750E - 03
8.000E + 00     -4.500E - 03
9.000E + 00     -5.250E - 03
1.000E + 01     -6.000E - 03
```

التيار Vs يكون صفراً عند Vs = 2 V .

15.5 أجر تحليل التيار المستمر لدائرة شكل 15-26 وأوجد مكافيء ثفنين لها بالنسبة للطرفين AB .



شكل 15-26

نستخدم أمر TF. فى قائمة الشبكة التالية :

```
Thévenin equivalent of Fig. 15-26
Vs      1  0    DC    3
R1      1  2    10
Is      0  2    DC    1
.TF     V(2)    Is
.END
```

يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
NODE      VOLTAGE        NODE      VOLTAGE
(1)       3.0000         (2)       13.000

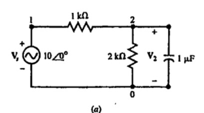
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        1.000E + 00

TOTAL POWER DISSIPATION     -3.00E + 00     WATTS

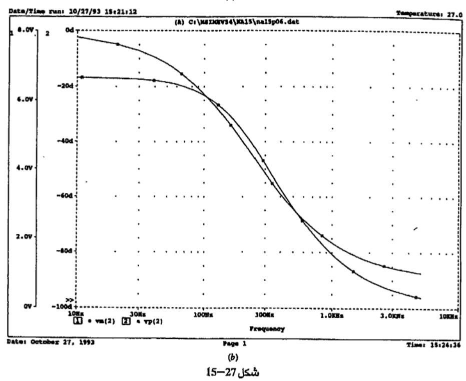
SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2)/Is = 1.000E + 01
INPUT RESISTANCE AT Is = 1.000E + 01
OUTPUT RESISTANCE AT V(2) = 1.000E + 01
```

مكافيء ثفنين $V_{Th} = V_2 = 13$ V ، $R_{Th} = 10\ \Omega$.

15.6 إجر تحليل التيار المتردد فى دائرة شكل 15-27(a) وأوجد القيمة المركبة للجهد V_2 لقيم f المتغيره من 100 Hz إلى 10 kHz فى 10 خطوات .



(a)



(b)

شكل 27–15

نضيف إلى قائمة الشبكة أمر AC. لتغير التردد ونحصل على V(2) بأى من الأوامر PRINT. ، PLOT. ، PROBE. وبذلك يكون ملف الدخل هو :

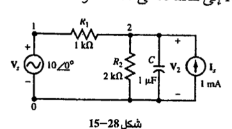
```
AC analysis of Fig. 15-27(a).
Vs       1  0    AC       10     0
R1       1  2    1 k
R2       2  0    2 k
C        2  0    1 uF
.AC      LIN     10       100    10000
.PRINT   AC      Vm(2)           Vp(2)
.PLOT    AC      Vm(2)           Vp(2)
.PROBE           Vm(2)           Vp(2)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
AC ANALYSIS
FREQ          VM(2)         VP(2)
1.000E + 02   6.149E + 00   -2.273E + 01
1.200E + 03   1.301E + 00   -7.875E + 01
2.300E + 03   6.883E - 01   -8.407E + 01
3.400E + 03   4.670E - 01   -8.598E + 01
4.500E + 03   3.532E - 01   -8.696E + 01
5.600E + 03   2.839E - 01   -8.756E + 01
6.700E + 03   2.374E - 01   -8.796E + 01
7.800E + 03   2.039E - 01   -8.825E + 01
8.900E + 03   1.788E - 01   -8.846E + 01
1.000E + 04   1.591E - 01   -8.863E + 01
```

وقد رسمت قيم وزاوية وجه V_2 بتفصيل أكثر فى شكل 15-27(b) .

15.7 إجر تحليل التيار المستمر والتيار المتردد فى الدائرة المبينة شكل 15-28 وأوجد القيمة المركبة للجهد V_2 مع تغيير f من 100 Hz إلى 10 kHz فى 100 خطوة .



شكل 15-28

ملف المنبع هو :

```
DC and AC analysis of Fig. 15-28
Vs       1 0     AC     10    0
Is       0 2     DC     1 mA
R1       1 2     1 k
R2       2 0     2 k
C        2 0     1 uF
.AC      LIN     100    100   10000
.PROBE   Vm(2)   Vp(2)
.END
```

يحتوى ملف الخرج على البيانات التالية :

```
SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION
NODE   VOLTAGE   NODE   VOLTAGE
(1)    0.0000    (2)    .6667

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME   CURRENT
Vs     6.667E - 04

TOTAL POWER DISSIPATION    -0.00E + 00   WATTS
```

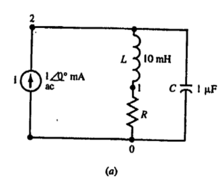
يتطابق شكل مركبة التيار المستمر للجهد V_2 مع الجهد V_2 للمسألة 15-6 المبينة شكل 15-27(b) .

15.8 : ارسم منحنيات التجاوب للدائرة المبينة شكل 15-29(a) لقيم $R = 2, 4, 6, 8, 10\ \Omega$.

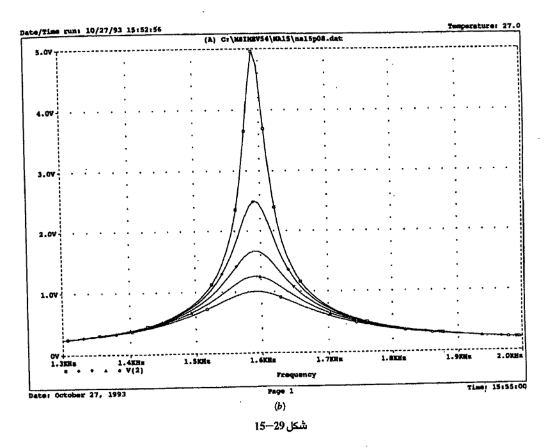
نقوم بتمثيل المقاومة بمقاومة ذات معامل واحد بقيمة ثابتة R وتغيير لقيمة المعامل R من 2 إلى 10 بخطوة قيمتها 2 Ω ونستخدم الأمر AC . لتغير التردد من 500 Hz إلى 3 kHz فى 100 خطوة وبذلك يكون ملف الدخل هو :

```
Parallel resonance of practical coil, Fig. 15-29
I        0 2     AC         1m    0
R        0 1     RLOSS      1
L        1 2     10m
C        0 2     1u
.MODEL   RLOSS   RES(R = 1)
.STEP    RES     RLOSS(R)   2     10    2
.AC      LIN     100  500   3000
.PROBE
.END
```

ويبين شكل 15-29(b) منحنيات الرنين بتفصيل أكثر .



(a)



(*b*)

شكل 15—29

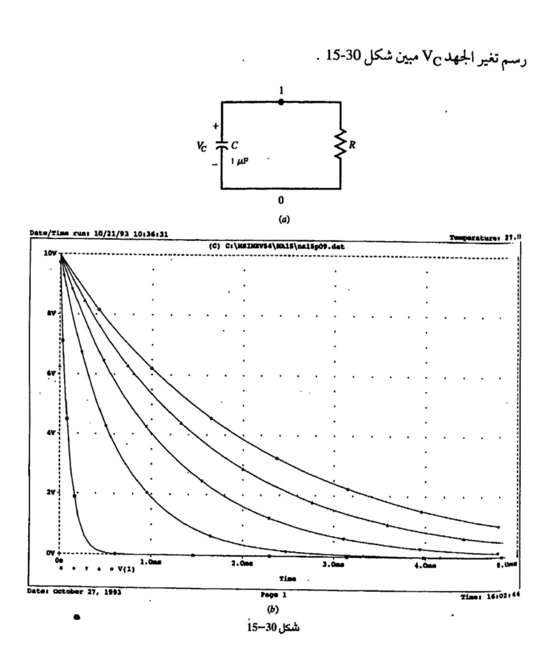
15.9 استعمل TRAN. ، PROBE. لرسم V_C على طرفى المكثف 1 μF فى الدائرة الخالية من المنبع لشكل 15-30(a) لقيم R = 100, 600, 1100, 1600, 2100 Ω والقيمة الابتدائية للجهد $V_C(0) = 10$ V.

تتغير قيم المقاومة R باستخدام MODEL. و STEP.

ملف الدخل هو

```
Natural response of RC, Fig. 15-30(a)
R         0  1      Rshunt        1
C         1  0      1 uF          IC = 10
.MODEL    Rshunt    RES(R = 1)
.STEP     LIN       RES           Rshunt(R)    100    2.1 k    500
.TRAN     1E − 4    50E − 4       UIC
.PLOT     TRAN      V(1)
.PROBE
.END
```

رسم تغير الجهد V_C مبين شكل 15-30 .



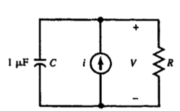
شكل 15–30

15.10 ارسم الجهود بين العقدتين لشكل 15-31(a) لتجاوب التيار السلمى 1 mA لقيم R = 100, 600, 1100, 1600, 2100 Ω .

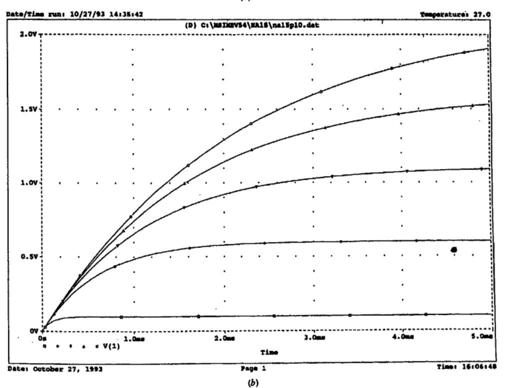
ملف الدخل هو :

```
Step response of RC, Fig. 15-31(a)
I         0  1     1 m
R         0  1     Rshunt        1
C         1  0     1 uF
.MODEL    Rshunt   RES(R = 1)
.STEP     LIN      RES           Rshunt(R)   100   2.1 k   500
.TRAN     1E - 4   50E - 4       UIC
.PLOT     TRAN     V(1)
.PROBE
.END
```

ويبين شكل 15-31(b) أشكال التجاوبات السلمية.



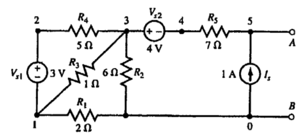
(a)



(b)

شكل 15–31

15.11 أوجد مكافيء ثفنين لشكل 15-32 من الطرفين AB .



شكل 15-32

نوجد جهد الدائرة المفتوحة عند AB من تحليل التيار المستمر كما نستخدم TF. لإيجاد مقاومة الخرج عند AB ويكون ملفا الدخل والخرج هما :

```
Solution to Fig. 15-32 and Thévenin equivalent at terminal AB
R1      0  1     2
R2      0  3     6
R3      1  3     1
R4      2  3     5
R5      4  5     7
Vs1     2  1     DC     3
Vs2     3  4     DC     4
Is      0  5     DC     1
.TF     V(5)     Vs1
.END
```

ويحتوى ملف الخرج على النتائج التالية :

```
NODE  VOLTAGE    NODE  VOLTAGE    NODE  VOLTAGE    NODE  VOLTAGE
(1)    1.2453    (2)    4.2453    (3)    2.2642    (4)   -1.7358
(5)    5.2642

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME       CURRENT
Vs1        -3.962E-01
Vs2        -1.000E+00

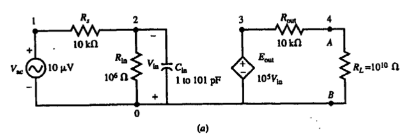
TOTAL POWER DISSIPATION    5.19E+00  WATTS

V(5)/Vs1 = 1.132E-01
INPUT RESISTANCE AT Vs1 = 5.889E+00
OUTPUT RESISTANCE AT V(5) = 8.925E+00
```

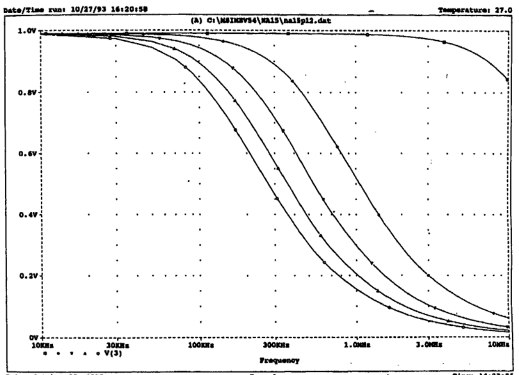
ويكون مكافيء ثفنين هو $V_{Th} = V_5 = 5.2642$ V ، $R_{Th} = 8.925\ \Omega$.

15.12 أوجد تجاوب التردد V_{AB}/V_{ac} لدائرة المكبر ذو الحلقة المفتوحة لشكل 15-33(a) .

اختبر ملف الدخل التالى مع 500 نقطة التغير للتردد من 100 Hz إلى 10 Hz .



(a)

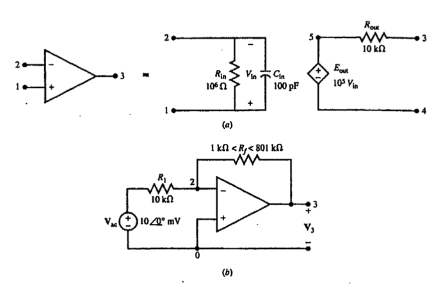


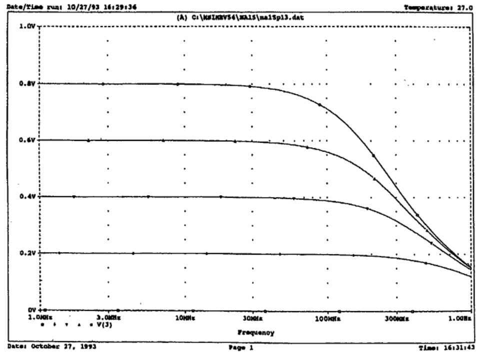
(b)

شكل 15–33

```
Open loop frequency response of amplifier, Fig. 15-33
Rs        1  2     10 k
Rin       0  2     10 E5
Cin       0  2     short        1
Rout      3  4     10 k
R1        4  0     10 E9
Eout      3  0     0  2         1 E5
Vac       1  0     AC           10 u     0
.MODEL    short    CAP(C = 1)
.STEP     LIN      CAP          short(C)     1 pF     101 pF     25 pF
.AC       LIN      500          100      10000 k
.PROBE
.END
```

رسم تجاوب التردد بالراسم للقيم المتغيرة للتردد من 10 kHz إلى 10 MHz كما هو مبين فى شكل (b)15-33 .





(c)

شكل 34–15

15.13 أكتب نموذجاً لمكبر تشغيل فى شكل (a)15-34 (كدائرة فرعية واستخدمه لإيجاد تجاوب التردد للعلاقة V_3/V_{ac} فى شكل (b)15-34 لتغير f من 1 MHz إلى 1 GHz .

ملف الدخل هو :

```
Closed loop frequency response of amplifier, Fig. 15-34
.SUBCKT       OPAMP        1  2  3  4
*  node 1 is the non-inverting input
*  node 2 is the inverting input
*  node 3 is the output
*  node 4 is the output reference (negative end of dependent source)
*  node 5 is the positive end of dependent source
Rin        1  2          10 E5
Cin        1  2          100 pF
Rout       3  5          10 k
Eout       5  4          1  2        1 E5
.ENDS
Vac        1  0          AC          10 m     0
R1         1  2          10 k
Rf         2  3          Rgain       1
X1         0  2  3  0    OPAMP
.MODEL     GAIN          RES(R = 1)
.STEP      LIN           RES     Rgain(R)    1 k     801 k     200 k
.AC        LIN           500     1000 k      1 000 000 k
.PROBE
.END
```

ورسم تجاوب التردد فى شكل (c)15-34 وبالمقارنة مع دائرة الحلقة المفتوحة لشكل (a)15-33 فإن كسب التيار المستمر يتناقص وعرض النطاق يزداد .

15.14 بالرجوع لدائرة RC لشكل 15-22 اختار ارتفاع النبضة الابتدائية بحيث يصل الجهد على طرفى المكثف 10 V فى 0.5 ms وحقق اجابتك برسم V_C عند $0 < t < 2$ ms .

يمكن حساب قيمة النبضة A من العلاقة

$A\,(1 - e^{-1/2}) = 10$ ومنها $A = 25.415$ V

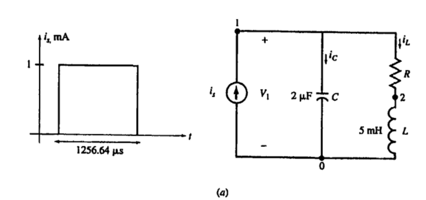
ويمكن توصيف منبع الجهد باستخدام الاصطلاح PULSE. ويكون ملف الدخل هو :

```
Vs      1 0     PULSE(10  25.415  1.0E-6  1.0E-6  0.5m  3m)
R       1 2     1k
C       2 0     1u
.TRAN   1.0E-6  2.0E-3  UIC
.PROBE
.END
```

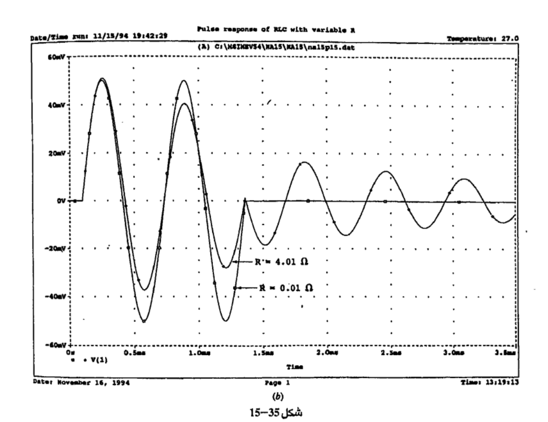
وشكل التجاوب مشابهاً لشكل (b)15-22 . وأثناء الفترة العابرة لقيم $0 < t < 0.5$ ms فإن الجهد يتزايد أسياً نحو قيمة التيار المستمر المستقرة 25.415 V ومع هذا فإنه عند $t = 0.5$ ms فإن جهد المكثف يصل إلى 10 V وجهد المنبع أيضاً يكون 10 V ويصبح تيار المقاومة صفراً ونصل إلى حالة الاستقرار .

15.15 ارسم الجهد على طرفى المكثف فى الدائرة شكل (a)15-35 لقيم $R = 0.02\ \Omega$, $4.01\ \Omega$ وتيار المنبع 1 mA كنبضة مربعة تستمر 1256.64 µs كما هو مبين فى شكل المنحنى i - t .

نمثل المقاومة بمقاومة ذات معامل واحد بقيمة ثابتة R ونغير R بالقيم من 0.01 إلى 4.01 بخطوة قيمتها 4 . ونستخدم الأمر AC . لتغير التردد من 500 Hz إلى 3 kHz فى 100 خطوة . ويكون ملف المنبع هو :



(a)



(*b*)

شكل 15-35

```
Pulse response of RLC with variable R
Is        0  1    Pulse(0   1 m   100 u   0.01 u   0.01 u   1256.64 u   5000 u)
R         1  2    LOSS      1
C         1  0    2000 n    IC = 0
L         2  0    5 m       IC = 0
.MODEL    LOSS    RES(R = 1)
.STEP     RES     LOSS(R)     .01    4.01    4
.TRAN     10 u    3500 u    0     1 u     UIC
.PROBE
.END
```

(الناتج مبين فى شكل (15-35(b) .

عند $R = 0.01\ \Omega$ فإن التجاوب العابر يكون تقريباً صفراً ويرجع ذلك إلى الحقيقة بأن عرض النبضة هو مضروب الزمن الدورى للذبذبات الطبيعية للدائرة .

مسائل إضافية

فى المسائل التالية استخدم PSpice لإعادة حل المسائل والأمثلة التالية :

15.16 حل مثال 9-5 [شكل 12-5] .

15.17 حل مثال 11-5 [شكل 16-5] .

15.18 حل مثال 14-5 [شكل 20-5] .

15.19 حل مثال 15-5 [شكل 21-5] .

15.20 حل مثال 20-5 [شكل 28-5] عند $x(t) = 1\ V$.

15.21 حل مسألة 12-5 (شكل 37-5) .

15.22 حل مسألة 16-5 (شكل 39-5) .

15.23 حل مسألة 25-5 (شكل 48-5) .

15.24 حل مسألة 26-5 (شكل 49-5) .

15.25 حل مسألة 48-5 (شكل 55-5) عند $\upsilon_{s1} = \upsilon_{s2} = 1\ V$.

15.26 حل مثال3-7 .

15.27 حل مثال 6-7 [شكل 12-7] .

15.28 حل مثال7 -7 (شكل (a)13-7) .

15.29 حل مثال 11-7 [شكل (a)17-7] .

15.30 حل مسألة 27-8 (شكل 31-8) .

15-31 حل مسألة 11-9 (شكل (a)2-9) .

15-32 حل مسألة 18-9 (شكل 28-9) .

15.33 حل مسألة 19-9 (شكل 29-9) .

15.34 حل مثال 5-11 [شكل 11.15(a)] .

15.35 حل مثال 6-11 [شكل 16-11] .

15.36 حل مثال 7-11 [شكل 17-11] .

15.37 حل مسألة 7-12 .

15.38 حل مسألة 14-12 (شكل 12-40(a)) .

15.39 حل مسألة 16-12 (شكل 43-12) .

15.40 حل مسألة 28-13 (شكل 31-13) لقيمة s = j .

15.41 حل مسألة 31-13 (شكل 33-13) .

15.42 حل مسألة 8-14 (شكل 24-14) .

15.43 حل مسألة 12-14 (شكل 28-14) .

15.44 حل مسألة 13-14 (شكل 29-14) .

15.45 حل مسألة 20-14 (شكل 35-14) .

15.46 حل مسألة 21-14 (شكل 36-14) لقيمة s = j .

الفصل السادس عشر

طريقة تحويل لابلاس

16.1 مقدمــة

العلاقة بين التجاوب $y(t)$ والإثارة $x(t)$ فى دوائر RLC هى معادلة تفاضلية خطية على الصورة .

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_j y^{(j)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + \cdots + b_i x^{(i)} + \cdots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \quad (1)$$

حيث $y^{(j)}$ ، $x^{(i)}$ هى المشتقات المسماه بنفس هذه الرموز (j) ، (i) بالنسبة للزمن لكل من $y(t)$ ، $x(t)$ على التوالى . وإذا كانت عناصر الدائرة ثابتة فإن العوامل المناظرة a_j ، b_i للمعادلة التفاضلية ستكون أيضاً ثوابت . وقد تم حل المعادلة التفاضلية فى الفصل 7 ، 8 بإيجاد التجاوب الطبيعى والتجاوب القصرى . وقد استخدما الدالة الأسية المركبة $x(t) = Xe^{st}$ وذلك ليشمل الحل تردد مجال s المركب .

ويمكن تلخيص طريقة تحويل لابلاس المشروحة فى هذا الفصل بتعميم مفهوم مجال s للمصطلاحات الرياضية بحيث يشمل ليس فقط الإثارات الأسية ولكن أيضاً الإثارات الأخرى المتعددة . ومن خلال تحويل لابلاس فإننا نمثل مجموعة كبيرة من الإثارات لمجموعة دوال أسية مركبة ثم نستخدم طريقة التراكب للحصول على التجاوب الكلى .

16.2 تحويــل لابـــلاس

إذا كان $f(t)$ هى دالة زمنية قيمتها صفر عند $t \leq 0$ والتى تكون (تحت تأثير ظروف خاصة) معرفة اختيارياً عند $t > 0$ فإن تحويل لابلاس المباشر للدالة $f(t)$ والتى يرمز لها $\mathscr{L}[f(t)]$ تعرف بالتالى :

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt \quad (2)$$

وبذلك يكون الشكل [ ] $\mathscr{L}$ يعنى تحويل $f(t)$ والتى تكون فى مجال الزمن إلى $F(s)$ وهو مجال التردد المركب أو باختصار مجال s حيث s هى المتغير المركب $\sigma + j\omega$. وبينما يبدو أن التكامل سيكون صعباً فإن طريقة تحويلات لابلاس التى تستخدم الجداول التى تغطى كل الدوال المحتمل تواجدها فى نظريات الدوائر الأسية تعد حلاً سهلاً .

ومن المزايا الفريدة لهذا التحويل أنه إذا كان $f_1(t)$ ، $f_2(t)$ لهما نفس الصورة $F(s)$ فى مجال s فإن $f_1(t) = f_2(t)$ وهذا يسمح أيضاً بعكس الترتيب من مجال s إلى مجال الزمن وهى تسمى تحويل لابلاس المعكوس $\mathscr{L}^{-1}[F(t)] = f(t)$. ويمكن أيضاً التعبير عن تحويل لابلامس المعكوس بالتكامل وهو التكامل المعكوس المركب .

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathbf{F(s)}] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \mathbf{F(s)} e^{st}\, ds \qquad (3)$$

فى (3)نجد أن مسار التكامل يكون خطاً مستقيماً موازياً لمحور $j\omega$ بحيث تقع جميع أقطاب $F(s)$ على يسار الخط . وهنا مرة أخرى لا حاجة لإجراء التكامل إذا لم يكن هناك سؤال خاص لإضافته إلى حدود أزواج التحويل المعرفة بالجدول السابق .

ويجب ملاحظة أنه عند استخدام تحويل لابلاس المباشر بالنسبة للكميات الطبيعية فإن ذلك سيضيف وحدة زمن إضافية فى الناتج . فمثلاً إذا كان $f(t)$ يعبر عن التيار بالأمبير (A) فإن $I(s)$ يجب أن تكون A.s (أو C) . ولأن وحدة s الإضافية سوف تهمل عند استخدام تحويل لابلاس المعكوس فإننا غالباً ما نتجاهل ذلك بالرجوع للوحدات الأصلية فى مجال s مثل التيار $I(s)$ ويحدد بإتجاهه .

16.3 تحويلات لابلاس المختارة

يمكن الحصول بسهولة على تحويل لابلاس بالنسبة لدالة الوحدة السلمية :

$$\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} (1)e^{-st}\, dt = -\frac{1}{\mathbf{s}}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\mathbf{s}}$$

نظراً لأن تحويل لابلاس خطى فإن $\upsilon(t) = Vu(t)$ فى مجال الزمن له الصورة $V(s) = V/S$ فى مجال s .

والدالة الأسية المتناقصة والتى غالباً ما تكون كما فى الفصل 7 هى الأخرى دالة يمكن تحويلها كالتالى :

$$\mathscr{L}[Ae^{-at}] = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}\,dt = \frac{-A}{a+s}[e^{-(a+s)t}]_0^\infty = \frac{A}{s+a}$$

ويكون المعكوس :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+a}\right] = Ae^{-at}$$

ويمكن الحصول أيضاً على تحويل الدالة الجيبية بسهولة كالتالى :

$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \int_0^\infty (\sin\omega t)e^{-st}\,dt = \left[\frac{-s(\sin\omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega\cos\omega t}{s^2+\omega^2}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

ومن المفيد حالياً الحصول على تحويل المشتقة df(t) / dt :

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt$$

وبإجراء التكامل عن طريق التقسيم :

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = [e^{-st}f(t)]_{0^+}^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})\,dt = -f(0^+) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = -f(0^+) + sF(s)$$

وتوجد مجموعة صغيرة من أزواج التحويلات والتى تشمل أيضاً ما ذكر سابقاً فى جدول 16-1 . والخمس أسطر الأخيرة فى الجدول تمثل بعض الخواص العامة لتحويل لابلاس .

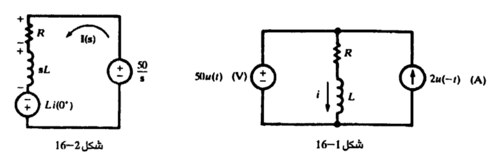
مثال 16.1 : اعتبر دائرة التوالى RL بها $R = 5\ \Omega$ ، $L = 2.5$ mH . وعند الزمن $t = 0$ حينما كان التيار 2 A وصل منبع 50 V . والدائرة فى مجال الزمن هى المبينة شكل 16-1 .

مجال الزمن	مجال s
(i) $Ri + L\dfrac{di}{dt} = v$ →	(ii) $RI(s) + L[-i(0^+) + sI(s)] = V(s)$
↓	(iii) $5I(s) + (2.5\times10^{-3})[-2 + sI(s)] = \dfrac{50}{s}$ ↓
(classical methods)	(iv) $I(s) = \dfrac{10}{s} + \dfrac{-8}{s+2000}$
↓	(v) $10\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 10$
(vii) $i(t) = 10 - 8e^{-2000t}$	(A) ← (vi) $(-8)\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2000}\right] = -8e^{-2000t}$

جـــدول 16-1

أزواج تحويلات لابلاس

	$f(t)$	$\mathbf{F}(\mathbf{s})$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7.	$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
8.	$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
9.	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
10.	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
11.	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
12.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
13.	$\frac{df}{dt}$	$s\mathbf{F}(s)-f(0^+)$
14.	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{\mathbf{F}(s)}{s}$
15.	$f(t-t_1)$	$e^{-t_1 s}\mathbf{F}(s)$
16.	$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$	$c_1\mathbf{F}_1(s)+c_2\mathbf{F}_2(s)$
17.	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$	$\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)$



شكل 16-2 شكل 16-1

باستخدام قانون كيرشوف للجهد للدائرة عند $t > 0$ ينتج المعادلة التفاضلية المعروفة (i) وتحول هذه المعادلة حداً حداً لمجال s للحصول على (ii) ويصبح التيار المجهول $i(t)$ هو التيار $I(s)$ بينما يتحول الجهد المعروف $\upsilon = 50\ \mu(t)$ إلى $50/s$ وأيضاً تحول di/dt إلى $-i(0^+) + SI(s)$. والتى فيها $i(0^+)$ هو 2 A . ثم نحل المعادلة (iii) بالنسبة $I(s)$ ويوضح الحل فى الشكل (iv) بطريقة بند 6-16 وتستخدم الأسطر 1، 3، 16 فى جدول 1-16 للحصول على معكوس لابلاس $I(s)$ والتى هى $i(t)$.

ويمكن رسم الدائرة فى مجال s كما هو مبين شكل 2-16 . ويظهر التيار الابتدائى فى الدائرة كمنبع جهد $Li(0^+)$ وينشئ تيار مجال s الجهد $RI(s)$ ، $sLI(s)$ فى (ii) كتيارات متجهة I وتنشئ المعاوقة Z الجهد المتجه IZ .

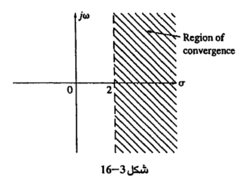
16.4 تقارب التكامل

لكى يتواجد تحويل لابلاس فإن التكامل (2) يجب أن يتقارب . وهذا يجعل المتغير $s = \sigma + j\omega$ جزء من المستوى المركب يسمى مدى التقارب . وكمثال فإن التحويل $x(t) = e^{-at}u(t)$ هو $1/(s + a)$ بشرط أن $Re[s] > -a$ والتى تعرف بمدى التقارب .

مثـال 16.2 : أوجد تحويل لابلاس للدالة $x(t) = 3e^{2t}u(t)$ وبين مدى التقارب .

$$X(s) = \int_0^\infty 3e^{2t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty 3e^{-(s-2)t}\,dt = \frac{3}{s-2}\,[e^{-(s-2)t}]_0^\infty = \frac{3}{s-2}, \qquad Re\,[s] > 2$$

مدى التقارب للدالة $X(s)$ هى النصف الأيمن للمستوى $\sigma > 2$ والمبين بالجزء المخطط لشكل 3-16



شكل 3–16

16.5 نظريتى القيمة الابتدائية والقيمة النهائية

بأخذ ∞ <-- s (بالنسبة للقيم الحقيقية) لتحويل لابلاس للمشتقة dt(t)/dt .

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt = \lim_{s\to\infty}\{s\mathbf{F}(s) - f(0^+)\}$$

ولكن e^{-st} فى التكامل تقترب من صفر كلما ∞ <-- S ولذلك :

$$\lim_{s\to\infty}\{s\mathbf{F}(s) - f(0^+)\} = 0$$

وحيث أن $f(0^+)$ ثابت فيمكن كتابة :

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty}\{s\mathbf{F}(s)\}$$

والتى تكون البيان لنظرية القيمة الابتدائية ;

مثـــــال 16.3 : في مثال 1-16 .

$$\lim_{s\to\infty}\{s\mathbf{I}(s)\} = \lim_{s\to\infty}\left(10 - \frac{8s}{s+2000}\right) = 10 - 8 = 2$$

والذى يكون فى الحقيقة هو التيار الابتدائى $i(0^+) = 2$ A .

ويمكن أيضاً إيجاد نظرية القيمة النهائية من تحويل لابلاس المباشرة للمشتقة ولكن يؤخذ 0 <-- s (من خلال قيم حقيقية) .

$$\lim_{s\to 0} \mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt = \lim_{s\to 0}\{s\mathbf{F}(s) - f(0^+)\}$$

ولكن

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt=\int_0^\infty df(t)=f(\infty)-f(0^+)$$

وحيث أن $f(0^+)$ ثابت لذلك :

$$f(\infty)-f(0^+)=-f(0^+)+\lim_{s\to 0}\{s\mathbf{F}(s)\}$$

or

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}\{s\mathbf{F}(s)\}$$

وهذا هو بيان نظرية القيمة النهائية . ويمكن تطبيق النظرية فقط حينما تحتوى جميع الأقطاب للدالة $sF(s)$ على مقادير حقيقية سالبة . وبذلك لا تشمل التحويلات للدوال مثل e^t ، $\cos t$ والتى تؤول إلى ما لا نهاية أو قيم محددة عندما $t \to \infty$.

16.6 مفكوك الكسور الجزئية

فى تحليل الدوائر فى المسائل يمكن أن تكون القيمة المجهولة إما التيار $i(t)$ أو الجهد $v(t)$. وفى مجال s فستكون $I(s)$ أو $V(s)$ بالنسبة للدوائر التى درست فى هذا الكتاب وستكون دالة جذرية على الصورة :

$$\mathbf{R(s)}=\frac{\mathbf{P(s)}}{\mathbf{Q(s)}}$$

بحيث أن متعدد الحدود $Q(s)$ يكون برتبة أعلى من $P(s)$. وعلاوة على ذلك فإن $R(s)$ تكون حقيقية لقيم s الحقيقية وبالتالى فإن أى أقطاب غير حقيقية للدالة $R(s)$ أى جذور غير حقيقية للمعادلة $Q(s) = 0$ يجب أن تحدث على شكل أزواج مركبة مترافقة .

وفى مفكوك الكسور الجزئية فإن الدالة $R(s)$ تقسم إلى كسور جذرية بسيطة وتسمى الأجزاء الرئيسية فيكون لكل قطب للدالة $R(s)$ جزء رئيسى خاص به .

الحالة 1 : $s = a$ وهى قطب بسيط : حينما $s = a$ وهو جذر غير مكرر للمعادلة $Q(s) = 0$ فإن الجزء الرئيسى للدالة $R(s)$ هو :

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{s-a}}\qquad \text{where}\qquad \mathbf{A}=\lim_{s\to a}\{(\mathbf{s-a})\mathbf{R(s)}\}$$

وإذا كانت a حقيقية فكذلك ستكون A وإذا كانت a مركبة فإن *a ستكون أيضاً قطباً بسيطاً ومقام لجزئه الرئيسى *A . لاحظ أنه إذا كان a = 0 فإن A ستكون القيمة النهائية للدالة r(t) .

الحالة 2 : s = b وهى قطب مزدوج . حينما s = b جذراً مزدوجاً للمعادلة Q(s) = 0 فإن الجزء الرئيسى المناظر يكون :

$$\frac{B_1}{s-b}+\frac{B_2}{(s-b)^2}$$

حيث يمكن إيجاد الثابتين B_1 ، B_2 كالتالى :

$$B_2 = \lim_{s\to b} \{(s-b)^2 R(s)\} \qquad \text{and} \qquad B_1 = \lim_{s\to b} \left\{(s-b)\left[R(s)-\frac{B_2}{(s-b)^2}\right]\right\}$$

B_1 يمكن أن تكون صفراً ومشابهاً للحالة 1 فإن B_1 ، B_2 حقيقيان إذا كانت b حقيقية وهذان الثابتان للقطب المزدوج *b هما المرافقان لتلك الخاص بالقيمة b .

ويمكن الحصول على الجزء الرئيسى للأقطاب الأعلى بالرجوع للحالة 2 . ومع ذلك سنفترض أن R(s) ليس لها مثل هذه الأقطاب . وبمجرد معرفة مفكوك الكسور الجزئية للدالة R(s) فإننا نستعمل جدول 1-16 لتحويل كل حد وبالتالى للحصول على دالة الزمن r(t) .

مثـــال 16.4 : أوجد التيار i(t) فى مجال الزمن إذا كان تحويل لابلاس له :

$$I(s)=\frac{s-10}{s^4+s^2}$$

وبتحليل المقام

$$I(s)=\frac{s-10}{s^2(s-j)(s+j)}$$

نجد أن أقطاب I(s) هى s = 0 (قطب مزدوج) ، s = ± j (أقطاب بسيطة) .

الجزء الرئيسي عند S = 0 هو :

$$\frac{B_1}{s}+\frac{B_2}{s^2}=\frac{1}{s}-\frac{10}{s^2}$$

since

$$B_2 = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s-10}{(s-j)(s+j)}\right] = -10$$

$$B_1 = \lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{s-10}{s^2(s^2+1)}+\frac{10}{s^2}\right]\right\} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{10s+1}{s^2+1}\right) = 1$$

الجزء الرئيسى عند s = +j هو :

$$\frac{A}{s-j} = -\frac{0.5+j5}{s-j}$$

$$A = \lim_{s \to j}\left[\frac{s-10}{s^2(s+j)}\right] = -(0.5+j5)$$

ويتبع ذلك مباشرة أن الجزء الرئيسى عند s = -j هو :

$$-\frac{0.5-j5}{s+j}$$

مفكوك الكسور الجزئية للمعادلة I(s) ستكون بالتالى :

$$I(s) = \frac{1}{s} - 10\frac{1}{s^2} - (0.5+j5)\frac{1}{s-j} - (0.5-j5)\frac{1}{s+j}$$

وباستخدام جدول 16-1 للتحويل حداً حداً فإن :

$$i(t) = 1 - 10t - (0.5+j5)e^{jt} - (0.5-j5)e^{-jt} = 1 - 10t - (\cos t - 10\sin t)$$

قانون مفكوك هيفيسايد

إذا كانت جميع أقطاب R(s) بسيطة فإنه يمكن إيجاد مفكوك الكسور الجزئية وتحويلات الحدود فى خطوة واحدة كالتالى :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \qquad (4)$$

حيث $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ هى الأقطاب $Q'(a_k)$ هى $dQ(s)/ds$ عند $s = a_k$.

16.7 الدوائر فى مجال s

استخدمنا فى الفصل 8 الاعتبارات الخاصة بالمعاوقة العامة والمسامحة ودوال التحويل كدوال للتردد المركب s . وفى هذا البند نقوم بتوسيع استخدام التردد المركب لتحويل دائرة RLC المحتوية على المنابع والحالات الابتدائية من مجال الزمن إلى مجال s .

جـــدول 16-2

Time Domain	s-Domain	s-Domain Voltage Term
$i \rightarrow$ R	$I(s) \rightarrow$ R	$R\,I(s)$
$i \rightarrow$ L, $\rightarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow$ sL, (−+) $Li(0^+)$	$sL\,I(s) + Li(0^+)$
$i \rightarrow$ L, $\leftarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow$ sL, (+−) $Li(0^+)$	$sL\,I(s) + Li(0^+)$
$i \rightarrow$ C, $+V_0^-$	$I(s) \rightarrow$ $\frac{1}{sC}$, (+−) $\frac{V_0}{s}$	$\frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$
$i \rightarrow$ C, $-V_0^+$	$I(s) \rightarrow$ $\frac{1}{sC}$, (−+) $\frac{V_0}{s}$	$\frac{I(s)}{sc} - \frac{V_0}{s}$

يعرض جدول 16-2 الحدود المطلوبة لإنشاء صورة مجال s لدائرة معطاه فى مجال الزمن والحدود الثلاثة الأولى للجدول سبق ذكرها فى مثال 16-1 وبالسبة للمكثف فإنه عند $t > 0$.

$$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

وبالتالى فإنه من جدول 16-1 :

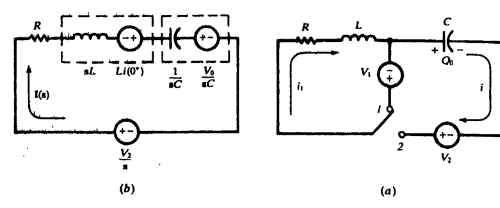
$$V_C(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{I(s)}{Cs}$$

مثـــال 16.5 : فى الدائرة المبـينة شكل 16-4(a) إنشئ التيار الابتـدائى i_1 حينما كان المفتاح عند الوضع ١ . وعند $t = 0$ تحرك إلى الوضع 2 بحيث يسمح لدخول الدائرة للمكثف مع شحنة ابتدائية Q_0 ومنبع جهد ثابت V_2 .

الدائرة فى مجال s مبينة شكل 16-4(b) والمعادلة فى مجال s هى :

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{sC} = \frac{V_2}{s}$$

والتى بها $V_0 = Q_0/C$ ، $i(0^+) = i_1 = V_1/R$.



شكل 3—16

مسائل محلولة

16.1 أوجد تحويل لابلاس للدالة $e^{-at}\cos \omega t$ حيث a مقدار ثابت .

باستخدام معادلة التعريف $\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ للدالة المعطى نحصل على :

$$\mathscr{L}[e^{-at}\cos \omega t] = \int_0^\infty \cos \omega t e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{-(s+a)\cos \omega t e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t}\omega \sin \omega t}{(s+a)^2+\omega^2}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

16.2 إذا كان $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ بين أن $\mathscr{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$ واستخدم هذه النتيجة للمسألة 1-16 .

من التعريف

$$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty [e^{-at}f(t)]e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}\,dt = F(s+a) \qquad (5)$$

بتطبيق (5) للسطر 6 فى جدول 16-1 يعطى :

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

وهو كما سبق فى المسألة 16-1 .

16.3 أوجد تحويل لابلاس للمعادلة f(t) = 1 - e^{-st} حيث a مقدار ثابت .

$$\mathcal{L}[1-e^{-at}] = \int_0^\infty (1-e^{-at})e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st} + \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

طريقة أخرى :

$$\mathcal{L}\left[a\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau\right] = a\,\frac{1/(s+a)}{s} = \frac{a}{s(s+a)}$$

16.4 أوجد :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right]$$

باستعمال طريقة الكسور الجزئية .

$$\frac{1}{s(s^2-a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

والمعاملات هى :

$$A = \frac{1}{s^2-a^2}\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \qquad B = \frac{1}{s(s-a)}\bigg|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \qquad C = \frac{1}{s(s+a)}\bigg|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

لذلك

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s-a}\right]$$

ودوال الزم المناظرية توجد من جدول 16-1 .

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}e^{-at} + \frac{1}{2a^2}e^{at}$$

$$= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)$$

طريقة أخرى :

من السطرين 11 ، 14 لجدول 16-1 فإن :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1/(s^2-a^2)}{s}\right]=\int_0^t \frac{\sinh a\tau}{a}\,d\tau=\left[\frac{\cosh a\tau}{a^2}\right]_0^t=\frac{1}{a^2}(\cosh at-1)$$

16.5 أوجد :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right]$$

باستعمال طريقة الكسور الجزئية نحصل على :

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B_1}{s+2}+\frac{B_2}{(s+2)^2}$$

Then $$A=\frac{s+1}{(s+2)^2}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{4}\qquad B_2=\frac{s+1}{s}\bigg|_{s=-2}=\frac{1}{2}$$

and $$B_1=(s+2)\frac{s+2}{2s(s+2)^2}\bigg|_{s=-2}=-\frac{1}{4}$$

Hence $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right]$$

ودوال الزمن المناظرة من جدول 16-1 كالتالى :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}te^{-2t}$$

16.6 لدائرة التوالى RC المبينة شكل 16-5 كانت الشحنة الابتدائية للمكثف 2.5 mC وعند $t = 0$ أقفل المفتاح ووصل منبع جهد ثابت $V = 100$ V . استخدم طريقة تحويل لابلاس لإيجاد التيار .

معادلة مجال الزمن للدائرة المعطاه بعد قفل المفتاح :

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\left[Q_0+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right]=V$$

or $$10i(t)+\frac{1}{50\times10^{-6}}\left[(-2.5\times10^{-3})+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right]=V \qquad (6)$$

الشحنة Q_0 معاكسة للشحنة من ناحية القطبية بالنسبة للشحنة التى يسببها المنبع على المكثف ويأخذ تحويل لابلاس للحدود فى معادلة (6) نحصل على معادلة مجال s التالية :

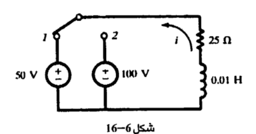
$$10I(s) - \frac{2.5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-6} s} + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6} s} = \frac{100}{s}$$

or

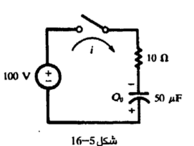
$$I(s) = \frac{15}{s + (2 \times 10^3)} \qquad (7)$$

والآن نحصل على دالة الزمن بأخذ معكوس تحويل لابلاس لمعادلة (7)

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{15}{s + (2 \times 10^3)}\right] = 15e^{-2\times10^3 t} \quad \text{(A)} \qquad (8)$$



شكل 6–16



شكل 5–16

16.7 فى دائرة RL المبينة شكل 16.6 كان المفتاح فى الوضع 1 مدة طويلة كافية للوصول إلى حالة الاستقرار وعند t = 0 وصل بالنقطة 2 . أوجد التيار الناتج .

افترض إتجاه التيار كما هو فى الرسم . وبالتالى فإن التيار الابتدائى $i_0 = -50/75 = 2$ A .

معادلة مجال الزمن هى :

$$25i + 0.01\frac{di}{dt} = 100 \qquad (9)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (9) .

$$25I(s) + 0.01\,sI(s) - 0.01\,i(0^+) = 100/s \qquad (10)$$

وبالتعويض لقيمة $i(0^+)$

$$25I(s) + 0.01\,sI(s) + 0.01(2) = 100/s \qquad (11)$$

وأيضاً

$$I(s) = \frac{100}{s(0.01s + 25)} - \frac{0.02}{0.01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500} \qquad (12)$$

وباستخدام طريقة الكسور الجزئية فإن :

$$\frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500} \qquad (13)$$

ومع $A = \frac{10^4}{s+2500}\Big|_{s=0} = 4 \qquad \text{and} \qquad B = \frac{10^4}{s}\Big|_{s=-2500} = -4$

فإن

$$\mathbf{I}(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2500} - \frac{2}{s+2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s+2500} \qquad (14)$$

وبأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (14) نحصل على $i = 4 - 6e^{-2500t}$ (A) .

16.8 فى دائرة التوالى RL لشكل 7-16 وصل جهداً أسياً $\upsilon = 50e^{-100t}$ (V) وذلك بقفل المفتاح عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج.

معادلة التيار فى مجال الزمن هى :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v \qquad (15)$$

وفى مجال s معادلة (15) تأخذ الصورة :

$$R\mathbf{I}(s) + sL\mathbf{I}(s) - Li(0^+) = \mathbf{V}(s) \qquad (16)$$

وبالتعويض بثوابت الدائرة وبتحويل المنبع $V(s) = 50/(s + 100)$ فى (16) .

$$10\mathbf{I}(s) + s(0.2)\mathbf{I}(s) = \frac{50}{s+100} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{I}(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \qquad (17)$$

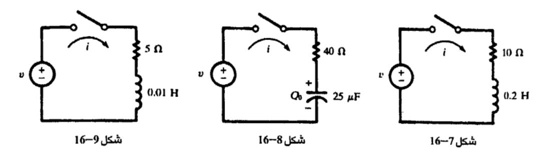
وبقانون مفكوك هيفيسايد

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathbf{I}(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{a}_n)}{\mathbf{Q}'(\mathbf{a}_n)} e^{\mathbf{a}_n t}$$

Here, $\mathbf{P}(s) = 250$, $\mathbf{Q}(s) = s^2 + 150s + 5000$, $\mathbf{Q}'(s) = 2s + 150$, $\mathbf{a}_1 = -100$, and $\mathbf{a}_2 = -50$. Then,

$$i = \mathscr{L}^{-1}[\mathbf{I}(s)] = \frac{250}{-50}e^{-100t} + \frac{250}{50}e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \quad \text{(A)}$$

16.9 دائرة التوالى RC لشكل 8-16 بها منبع جهد جيبى $\upsilon = 180 \sin(2000t + \phi)$ (V) وشحنة ابتدائية على المكثف $Q_0 = 1.25$ mC بالقطبية المبينة . أوجد التيار إذا أقفل المفتاح عند الزمن المناظر لقيمة $\phi = 90°$.



شكل 16-9　　شكل 16-8　　شكل 16-7

معادلة مجال الزمن للدائرة هى :

$$40i(t) + \frac{1}{25 \times 10^{-6}}\left[(1.25 \times 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right] = 180 \cos 2000t \qquad (18)$$

يعطى تحويل لابلاس للمعادلة (18) المعادلة فى مجال s .

$$40\mathbf{I}(s) + \frac{1.25 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6} s} + \frac{4 \times 10^4}{s}\mathbf{I}(s) = \frac{180s}{s^2 + 4 \times 10^6} \qquad (19)$$

أو

$$\mathbf{I}(s) = \frac{4.5 s^2}{(s^2 + 4 \times 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1.25}{s + 10^3} \qquad (20)$$

وبتطبيق قانون مفكوك هيفيسايد للحد الأول على اليمين فى (20) نحصل على $P(s) = 4.5s^2$ ، $Q(s) = s^3 + 10^3s^2 + 4 \times 10^6 s + 4 \times 10^9$ ، $Q'(s) = 3s^2 + 2 \times 10^3 s + 4 \times 10^6$ ، $a_1 = -j2 \times 10^3$ ، $a_2 = -j2 \times 10^3$ ، $a_3 = -10^3$ وبالتالى فإن :

$$i = \frac{P(-j2 \times 10^3)}{Q'(-j2 \times 10^3)} e^{-j2\times 10^3 t} + \frac{P(j2 \times 10^3)}{Q'(j2 \times 10^3)} e^{j2\times 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} - 1.25 e^{-10^3 t}$$

$$= (1.8 - j0.9)e^{-j2\times 10^3 t} + (1.8 + j0.9)e^{j2\times 10^3 t} - 0.35 e^{-10^3 t} \qquad (21)$$

$$= -1.8 \sin 2000t + 3.6 \cos 2000t - 0.35 e^{-10^3 t}$$

$$= 4.02 \sin (2000t + 116.6°) - 0.35 e^{-10^3 t} \quad \text{(A)}$$

عند $t = 0$ يعطى التيار بالجهد اللحظى وهو عبارة عن جهد المنبع وجهد المكثف المشحون مقسوماً بالمقاومة وبالتالى :

$$i_0 = \left(180 \sin 90° - \frac{1.25 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6}}\right) \Big/ 40 = 3.25 \text{ A}$$

ونفس النتيجة نحصل عليها إذا وضعنا $t = 0$ فى (21) .

16.10 فى دائرة التوالى RL لشكل 16.9 كان الجهد $\upsilon = 100 \sin (500t + \phi)$ (V) . أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند الزمن المناظر للزاوية $\phi = 0$.

معادلة دائرة التوالى RL فى مجال s هى :

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \tag{22}$$

تحويل المنبع من $\phi = 0$ هو :

$$V(s) = \frac{(100)(500)}{s^2 + (500)^2}$$

وحيث أنه لا يوجد تيار ابتدائى فى الملف $Li(0^+) = 0$. وبتعويض ثوابت الدائرة فى (22) وبفك

$$5I(s) + 0.01\,sI(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 \times 10^4} \qquad \text{or} \qquad I(s) = \frac{5 \times 10^6}{(s^2 + 25 \times 10^4)(s + 500)} \tag{23}$$

وبفك (23) بالكسور الجزئية .

$$I(s) = 5\left(\frac{-1 + j}{s + j500}\right) + 5\left(\frac{-1 - j}{s - j500}\right) + \frac{10}{s + 500} \tag{24}$$

وتحويل لابلاس المعكوس للمعادلة (24) هو :

$$i = 10 \sin 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14 \sin (500t - 45°) \quad \text{(A)}$$

16.11 أعد حل المسألة 10-16 بأخذ دالة الجهد كما يلى :

$$\upsilon = 100e^{j500t} \quad \text{(V)} \tag{25}$$

والآن $V(s) = 100 / (s - j500)$ ، ومعادلة مجال s هى :

$$5I(s) + 0.01\,sI(s) = \frac{100}{s - j500} \qquad \text{or} \qquad I(s) = \frac{10^4}{(s - j500)(s + 500)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية

$$I(s) = \frac{10 - j10}{s - j500} + \frac{-10 + j10}{s + 500}$$

وبالمعكوس

$$\begin{aligned} i &= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} \\ &= 14.14\,e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 + j10)e^{-500t} \quad \text{(A)} \end{aligned} \tag{26}$$

والجهدهو الجزء التخيلى لمعادلة (25) ولذلك فإن التيار الحقيقى هو الجزء التخيلى من المعادلة (26).

$$i = 14.14 \sin(500t - \pi/4) + 10e^{-500t} \quad \text{(A)}$$

16.12 لدائرة التوالى RLC المبينة شكل 10-16 لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف. وإذا أقفل المفتاح عند t = 0 . أوجد التيار الناتج .

معادلة الدائرة فى مجال الزمن هى :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = V \qquad (27)$$

ولأن i(0⁺) = 0 فإن تحويلا لابلاس للمعادلة (27) هو :

$$R\mathbf{I}(s) + sL\mathbf{I}(s) + \frac{1}{sC}\mathbf{I}(s) = \frac{V}{s} \qquad (28)$$

أو

$$2\mathbf{I}(s) + 1s\mathbf{I}(s) + \frac{1}{0.5s}\mathbf{I}(s) = \frac{50}{s} \qquad (29)$$

وبالتالى

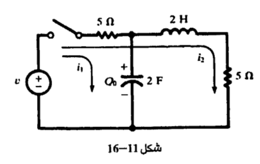
$$\mathbf{I}(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)} \qquad (30)$$

بفك المعادلة (30) بالكسور الجزئية

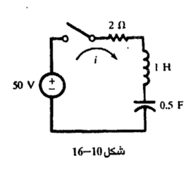
$$\mathbf{I}(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} - \frac{j25}{(s+1-j)} \qquad (31)$$

ومعكوس تحويلا لابلاس للمعادلة (31) يعطى :

$$i = j25\{e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\} = 50e^{-t}\sin t \quad \text{(A)}$$



شكل 16—11



شكل 16—10

16.13 للشبكة ذات الشبيكتين لشكل 11-16 تم اختيار التيارين كما هو مبين . أكتب معادلات مجال s في شكل مصفوفة وأنشئ الدائرة المناظرة .

بكتابة مجموعة المعادلات فى مجال الزمن فإن :

$$5i_1 + \frac{1}{2}\left[Q_0 + \int_0^t i_1(\tau)\,d\tau\right] + 5i_2 = v \qquad \text{and} \qquad 10i_2 + 2\frac{di_2}{dt} + 5i_1 = v \tag{32}$$

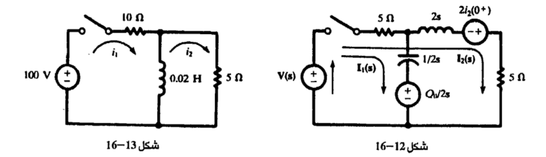
وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (32) للحصول على المعادلات المناظرة فى مجال s .

$$5\mathbf{I}_1(s) + \frac{Q_0}{2s} + \frac{1}{2s}\mathbf{I}_1(s) + 5\mathbf{I}_2(s) = \mathbf{V}(s) \qquad 10\mathbf{I}_2(s) + 2s\mathbf{I}_2(s) - 2i_2(0^+) + 5\mathbf{I}_1(s) = \mathbf{V}(s) \tag{33}$$

ولكى تأخذ هذه المعادلات شكلها فى شكل المصفوفة فإن :

$$\begin{bmatrix} 5 + (1/2s) & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(s) - (Q_0/2s) \\ \mathbf{V}(s) + 2i_2(0^+) \end{bmatrix}$$

الدائرة المطلوبة فى مجال s يمكن إيجادها باختيار مصفوفات Z(s) ، I(s) ، V(s) (انظر شكل 12-16).



شكل 13–16

شكل 12–16

16.14 للشبكة ذات الشبيكتين لشكل 13-16 أوجد التيارات التى تنتج حينما يقفل المفتاح .

معادلات مجال الزمن للشبكة هى :

$$\begin{aligned} 10i_1 + 0.02\frac{di_1}{dt} - 0.02\frac{di_2}{dt} &= 100 \\ 0.02\frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0.02\frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

وبأخذ تحويل لابلاس لمعادلة (34) .

$$(10 + 0.02s)\mathbf{I}_1(s) - 0.02s\mathbf{I}_2(s) = 100/s \qquad (5 + 0.02s)\mathbf{I}_2(s) - 0.02s\mathbf{I}_1(s) = 0^- \qquad (35)$$

ومن المعادلة الثانية فى معادلتى (35) نجد أن :

$$\mathbf{I}_2(s) = \mathbf{I}_1(s)\left(\frac{s}{s+250}\right) \qquad (36)$$

والتى حينما نعوض بها فى المعادلة الأولى نحصل على :

$$\mathbf{I}_1(s) = 6.67\left[\frac{s+250}{s(s+166.7)}\right] = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s+166.7} \qquad (37)$$

وبعكس (37) .

$$i_1 = 10 - 3.33e^{-166.7t} \quad \text{(A)}$$

وأخيراً عوض (37) فى (36) للحصول على :

$$\mathbf{I}_2(s) = 6.67\left(\frac{1}{s+166.7}\right) \qquad \text{whence} \qquad i_2 = 6.67e^{-166.7t} \quad \text{(A)}$$

16.15 باستخدام نظرية القيمة الابتدائية والقيمة النهائية فى المسألة 14-16 .

تعطى القيمة الابتدائية للتيار i_1 بالقيمة :

$$i_1(0^+) = \lim_{s\to\infty}[s\mathbf{I}_1(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[6.67\left(\frac{s+250}{s+166.7}\right)\right] = 6.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية :

$$i_1(\infty) = \lim_{s\to 0}[s\mathbf{I}_1(s)] = \lim_{s\to 0}\left[6.67\left(\frac{s+250}{s+166.7}\right)\right] = 10 \text{ A}$$

القيمة الابتدائية للتيار i_2 هى :

$$i_2(0^+) = \lim_{s\to\infty}[s\mathbf{I}_2(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[6.67\left(\frac{s}{s+166.7}\right)\right] = 6.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية هى :

$$i_2(\infty) = \lim_{s\to 0}[s\mathbf{I}_2(s)] = \lim_{s\to 0}\left[6.67\left(\frac{s}{s+166.7}\right)\right] = 0$$

وبفحص شكل 16-13 نتحقق من كل من القيمة الابتدائية والنهائية السابقة . ويعطى الملف معاوقة ما لا نهاية عند لحظة القفل . وتكون التيارات $i_1 = i_2 = 100 / (10 + 5) = 6.67$ A .
وبالتالى فإنه فى الحالة المستقرة يبدو الملف كما لو كان مقصوراً وبالتالى فإن $i_2 = 0$ ، $i_1 = 10$ A .

16.16 حل لإيجاد قيمة i_1 فى المسألة 14-16 وذلك بإيجاد الدائرة المكافئة فى مجال s .

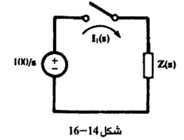
تكون معاوقة الملف (0.02 H) هى $Z(s) = 0.025$. وبالتالى فإن المعاوقة المكافئة للشبكة من ناحية المنبع هى :

$$Z(s) = 10 + \frac{(0.02s)(5)}{0.02s + 5} = 15\left(\frac{s + 166.7}{s + 250}\right)$$

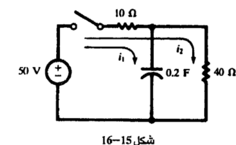
والدائرة المكافئة فى مجال s كما هو مبين شكل 14-16 وبالتالى فإن التيار يكون :

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s}\left[\frac{s + 250}{15(s + 166.7)}\right] = 6.67\left[\frac{s + 250}{s(s + 166.7)}\right]$$

وهذا التعبير متطابقاً مع (37) للمسألة 14-16 وبذلك نحصل على نفس دالة التيار i_1 .



شكل 16-14



شكل 16-15

16.17 فى الشبكة ذات الشبيكتين المبينة شكل 15-16 لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف . أوجد تيارى الحلقة i_1 ، i_2 الناتجان عند قفل المفتاح عند $t = 0$.

معادلات الدائرة فى مجال الزمن هى :

$$10i_1 + \frac{1}{0.2}\int_0^t i_1\, d\tau + 10i_2 = 50 \qquad 50i_2 + 10i_1 = 50$$

والمعادلات المناظرة فى مجال s هى :

$$10\mathbf{I}_1(s) + \frac{1}{0.2s}\mathbf{I}_1(s) + 10\mathbf{I}_2(s) = \frac{50}{s} \qquad 50\mathbf{I}_2(s) + 10\mathbf{I}_1(s) = \frac{50}{s}$$

وبالحل

$$\mathbf{I}_1(s) = \frac{5}{s+0.625} \qquad \mathbf{I}_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.625}$$

والتى تحول إلى :

$$i_1 = 5e^{-0.625t} \quad (A) \qquad i_2 = 1 - e^{-0.625t} \quad (A)$$

16.18 بالرجوع للمسألة 17-16 أوجد المعاوقة المكافئة فى شبكة المجال s واحسب التيار الكلى وتيارات الأفرع باستعمال قاعدة تقسيم التيار .

المعاوقة فى مجال s المكافئة من ناحية جهد المنبع هى :

$$\mathbf{Z}(s) = 10 + \frac{40(1/0.2s)}{40 + 1/0.2s} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10\left(\frac{s + 5/8}{s + 1/8}\right) \tag{38}$$

والدائرة المكافئة مبية شكل 16-16 ويكون التيار الناتج :

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{Z}(s)} = 5\,\frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)} \tag{39}$$

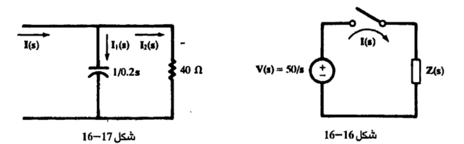
وبفك I(s) بالكسور الجزئية .

$$\mathbf{I}(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + 5/8} \qquad \text{from which} \qquad i = 1 + 4e^{-5t/8} \quad (A)$$

والآن يمكن الحصول على تيارات الأفرع $I_1(s)$ ، $I_2(s)$ بقاعدة تقسيم التيار . وبالرجوع لشكل 17-16 نحصل على :

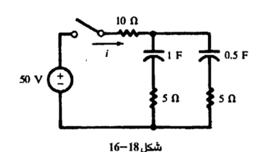
$$\mathbf{I}_1(s) = \mathbf{I}(s)\left(\frac{40}{40 + 1/0.2s}\right) = \frac{5}{s + 5/8} \qquad \text{and} \qquad i_1 = 5e^{-0.625t} \quad (A)$$

$$\mathbf{I}_2(s) = \mathbf{I}(s)\left(\frac{1/0.2s}{40 + 1/0.2s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \qquad \text{and} \qquad i_2 = 1 - e^{-0.625t} \quad (A)$$



شكل 16-17 شكل 16-16

16.19 أقفل المفتاح فى الشبكة شكل 18-16 عند t = 0 ولا توجد أى شحنات ابتدائية على المكثفين. أوجد التيار الناتج i .



شكل 16-18

المعاوقة المكافئة للشبكة فى مجال s هى :

$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0.5s)}{10 + 1/s + 1/0.5s} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$

وبالتالى فإن التيار :

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s}\frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

وبفك I(s) بالكسور الجزئية :

$$I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052} \qquad \text{and} \qquad i = \frac{1}{8}e^{-0.308t} + \frac{31}{8}e^{-0.052t} \quad \text{(A)}$$

16.20 استخدم نظريتى القيمة الابتدائية والقيمة النهائية لتيار مجال s للمسألة 19-16 .

$$i(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sI(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s + 0.308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s + 0.052}\right)\right] = 4 \text{ A}$$

$$i(\infty) = \lim_{s\to 0}[sI(s)] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s + 0.308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s + 0.052}\right)\right] = 0$$

وباختيار شكل 16-18 يبدو أن المقاومة الكلية للدائرة $R = 10 + 5(5) / 10 = 12.5\ \Omega$ وبالتالى $i(0^+) = 50/12.5 = 4$ A . وعلى ذلك فى الحالة المستقرة فإن كلا المكثفان سيكونان مشحوني للجهد 50 V ويكون التيار صفراً.

مسائل إضافية

16.21 أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية :

(a) $f(t) = At$ (c) $f(t) = e^{-at}\sin\omega t$ (e) $f(t) = \cosh\omega t$

(b) $f(t) = te^{-at}$ (d) $f(t) = \sinh\omega t$ (f) $f(t) = e^{-at}\sinh\omega t$

Ans. (a) – (e) See Table 16-1.
(f) $\dfrac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$

16.22 أوجد معكوس تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية :

(a) $F(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s+1)}$ (d) $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+6s+9)}$ (g) $F(s) = \dfrac{2s}{(s^2+4)(s+5)}$

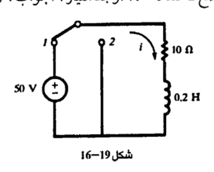
(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+7s+12}$ (e) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2+2s+5}$

(c) $F(s) = \dfrac{5s}{s^2+3s+2}$ (f) $F(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+13}$

Ans. (a) $2e^{-2t} - e^{-t}$ (d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} - te^{-3t}$ (g) $\frac{10}{29}\cos 2t + \frac{4}{29}\sin 2t - \frac{10}{29}e^{-5t}$
(b) $e^{-3t} - e^{-4t}$ (e) $e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$
(c) $10e^{-2t} - 5e^{-t}$ (f) $2e^{-2t}\cos 3t$

16.23 دائرة توالى RL بها $R = 10\ \Omega$ ، $L = 0.2$ H وجهد ثابت $V = 50$ V وصل عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج مستخدماً طريقة تحويل لابلاس. الجواب : $i = 5 - 5e^{-50t}$ (A) .

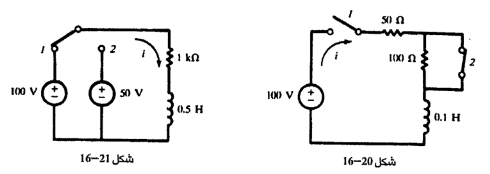
16.24 فى دائرة التوالى RL لشكل 16-19 كان المفتاح عند الوضع 1 لمدة طويلة للوصول إلى الحالة المستقرة ثم انتقل إلى الوضع 2 عند $t = 0$. أوجد التيار. الجواب : $i = 5e^{-50t}$ (A) .



شكل 16–19

16.25 فى الدائرة المبينة شكل 20-16 أقفل المفتاح 1 عند $t = 0$ ثم عند $t = t' = 4$ ms فتح المفتاح 2 .
أوجد التيار فى الفترتين $0 < t < t'$ ، عند $t > t'$.

الجواب : $i = 2(1 - e^{-500t})$ (A) ، $i = 1.06e^{-1500(t - t')} + 0.667$ (A) .



شكل 20–16

شكل 21–16

16.26 فى دائـرة التوالـى RL المبيـنة شـكل 21-16 أقفل المفتاح للوضع 1 عند $t = 0$ ثم عند $t = t' =$ 50 μs إنتقل إلى الوضع 2 . أوجد التيار فى الفترتين $0 < t < t'$ ، $t > t'$.

الجواب : $i = 0.1\ (1 - e^{-2000t})$ (A) ، $i = 0.06e^{-2000(t - t')} - 0.05$ (A) .

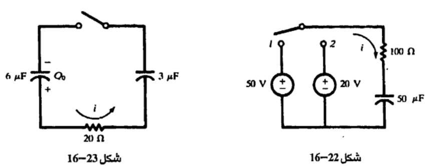
16.27 دائرة توالى RC بها $R = 10\ \Omega$ ، $C = 4\ \mu F$ لهما شحنة $Q_0 = 800\ \mu C$ على المكثف حينما كان المفتاح مقفولاً وباستخدام جهدا ثابتا $V = 100$ V . أوجد التيار الناتج العابر إذا كانت الشحنة (أ) لها نفس القطبية قبل تأثير المنبع ، (ب) لها القطبية المخالفة أو الإشارة .

الجواب : $i = -10e^{-25 \times 10^3 t}$ ، $i = 30e^{-25 \times 10^3 t}$.

16.28 فى دائرة RC ، $R = 10\ \Omega$ و $C = 4\ \mu F$ والمكثف له شحنة ابتدائية $Q_0 = 800\ \mu C$ عند زمن قفل المفتاح ، باستخدام منبع جهد ثابت قيمته $V = 100$ V . إذا كان التيار الناتج $i = 0.075e^{-50t}$ أوجد الشحنة Q_0 وقطبيتها . الجواب : 500 μC معاكس لقطبية المنبع .

16.29 فى دائرة RC المبينة شكل 22-16 أقفل المفتاح للوضع 1 عند $t = 0$ ثم عند $t = t' = \tau$ (τ الثابت الزمنى) تحرك للوضع 2 . أوجد التيار العابر للفترتين $0 < t < t'$ ، $t > t'$.

الجواب : $i = 0.5e^{-200t}$ (A) ، $i = 0.516e^{-200(t - t')}$ (A) .



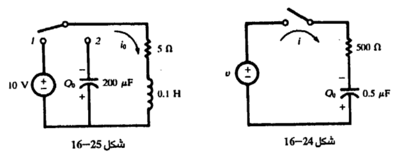
شكل 23—16

شكل 22—16

16.30 للدائرة شكل 16-23 . Q_0 = 300 μC عند زمن قفل المفتاح . أوجد التيار الناتج العابر .
الجواب : $i = 2.5e\omega_0^{-2.5 \times 10^4 t}$ (A) .

16.31 فى الدائرة المبينة شكل 16-24 الشحنة الابتدائية على المكثف Q_0 = 25 μC والجهد الجيبى للمنبع $\upsilon = 100 \sin (1000t + \phi)$. أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند الزمن $\phi = 30°$.
الجواب : $i = 0.1535e^{-4000t} + 0.0484 \sin (1000t + 106°)$ (A) .

16.32 دائرة توالى RLC بها R = 5 Ω ، L = 0.1 H ، C = 500 μF والجهد الثابت V = 10 V وصل عند t = 0 . أوجد التيار الناتج. الجواب : $i = 0.72e^{-25t} \sin 139t$ (A) .



شكل 25—16

شكل 24—16

16.33 فى دائرة التوالى RLC لشكل 16-25 كانت الشحنة الابتدائية Q_0 = 1 mC عندما كان المفتاح عند الوضع 1 لمدة طويلة للحصول على الحالة المستقرة . أوجد التيار العابر الناتج حيما يتحرك المفتاح للوضع 2 عند t = 0 . الجواب : $i = e^{-25t} (2 \cos 222t - 0.45 \sin 222t)$ (A) .

16.34 دائرة توالى RLC بها R = 5 Ω ، L = 0.2 H ، C = 1 F وضع جهد $\upsilon = 10e^{-100t}$ (V) وصل عند t = 0 . أوجد التيار الناتج.

الجواب : $i = 0.666e^{-100t} + 0.670e^{-24.8t} - 0.004e^{-0.2t}$ (A) .

16.35 دائرة توالى RLC بها $R = 200\ \Omega$ ، $L = 0.5\ H$ ، $C = 100\ \mu F$ والجهد الجيبى $\upsilon = 300 \sin (500t + \phi)$ (V) . أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند الزمن المناظر لقيمة $\phi = 30°$.

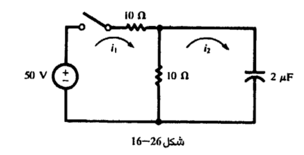
الجواب : $i = 517e^{-341.4t} - 0.197e^{-58.6t} + 0.983 \sin (500t - 19°)$ (A) .

16.36 دائرة توالى RLC بها $R = 5\ \Omega$ ، $L = 0.1\ H$ ، $C = 500\ \mu F$ والجهد الجيبى $\upsilon = 100 \sin 250t$ (V) . أوجد التيار الناتج إذا أقفل المفتاح عند $t = 0$.

الجواب : $i = e^{-25t} (5.42 \cos 139t + 1.89 \sin 139t) + 5.65 \sin (250t - 73.6°)$ (A) .

16.37 للشبكة ذات الشبيكتين لشكل 16-26 اختير إتجاه التياري كما فى الشكل . أكتب معادلات فى مجال الزمن حولها إلى معادلات مجال s المناظرة وأوجدالتيارين i_1 ، i_2 .

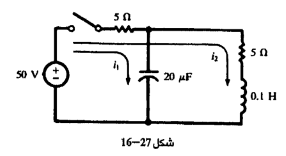
الجواب : $i_1 = 2.5 (1 + e^{-10^5 t})$ (A) ، $i_2 = 5e^{-10^5 t}$ (A) .



شكل 16—26

16.38 للشبكة ذات الشبيكتين المبينة شكل 16-27 . أوجد التيارين i_1 ، i_2 الناتجين بعد قفل المفتاح عند $t = 0$.

الجواب : $i_2 = 5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t}$ (A) ، $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$ (A) .



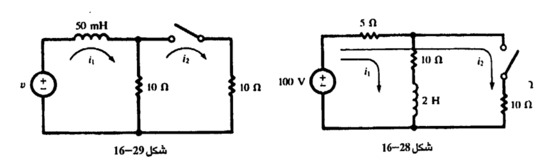
شكل 16—27

16.39 فى الشبكة المبينة شكل 28-16 يمرر المنبع 100 V تيار متصلا فى الحلقة الأولى حينما كان المفتاح مفتوحا . أوجد التيارات بعد قفل المفتاح عند $t = 0$.

الجواب : $i_2 = 0.555e^{-6.67t} + 5$ (A) ، $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5$ (A) .

16.40 الشبكة ذات الشبيكتين المبينة شكل 29-16 تحتوى على الجهد الجيبى $\upsilon = 100 \sin(200t + \phi)$ (V) .. أقفل المفتاح فى اللحظة التى كان الجهد يزداد بأقصى معدل . أوجد تيارى الشبيكة الناتج باستعمال الإتجاهات المبينة بالشكل .

الجواب : $i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48 \sin(200t - 63.4°)$ (A) ، $i_1 = 3.10e^{-100t} + 8.96 \sin$ (A)



شكل 29-16

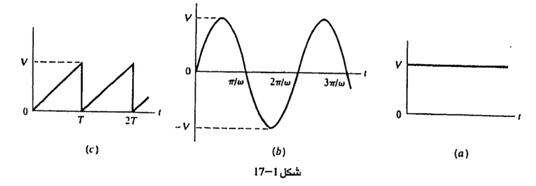
شكل 28-16

الفصل السابع عشر

طريقة فورير لتحليل أشكال الموجات

17.1 مقدمـــــة

فى الدوائر التى درســت سابقاً حصــلنا على التجـاوب بإثارة ثابتة القيـمة أو ذات تغيير جيبى فى هذه الحالات يكفى تعبير واحـد لشـرح الدالة فى جميع الأزمنة وكمثال : v = مقدار ثابت أمام $v = V \sin \omega t$ كما هو مبين شكل 17-1(a) ، (b) .



شكل 17-1

وبعض أشـكال الموجـات المتـعاقبـة مـثل مـوجـة سن المنشـار شكل 17-1(c) يمكن لكل فـتـرة تعريفها بدوال مفـردة . ولذلك فإنه يمكن التعبير عن موجة سن المنشار بالعلاقة $f(t) = (V/T)t$ فى الفترة $0 < t < T$ والعلاقة $f(t) = (V/T)(t - T)$ فى الفـتـرة $T < t < 2T$. وبينمـا توصف هذه العلاقات المجزءة شكل الموجة بصفة جيدة ولكنها لا تسمح بإيجاد تجاوب الدائرة . والآن إذا أمكن التعبير عن دالة متعاقبة كمجموع لعدد محدد أو غير محدد من الدوال الجيبية فإن تجاوبات الشبكات الخطية للإثارات الغير جيبية يمكن تحديدها باستخدام نظرية التراكب . وطريقة فورير توفر وسيلة لحل مثل هذه المسائل .

وفى هذا الفصل تم تطوير الطرق والحالات لهذه المفكوكات ويمكن التعبير عن أشكال الموجات المتعاقبة بصورة متواليات فورير . كما يمكن التعبير عن أشكال الموجات الغير متعاقبة بتحويلات فورير . ومع هذا فإن أشكال الموجات الغير متعاقبة يمكن أيضاً التعبير عنها بمتواليات فورير خلال فترة محددة والتى تكون صحيحة فى هذه الفترة .. ولهذا السبب فإن تحليل متواليات فورير هو موضوع هذا الفصل .

17.2 متواليات فورير المثلثية

يمكن التعبير عن أى شكل موجى متعاقب أى التى فيها $f(t) = f(t + T)$ بمتواليات فورير بشرط أن :

(1) إذا كانت مستمرة أى يوجد عدد محدد من الفصل فى الفترة T .

(2) لها قيمة متوسطة محددة خلال الفترة T .

(3) لها عدد من القيم العظمى الموجبة والسالبة فى الفترة T .

وحينما تحقق شروط ديريشلت السابقة فإنه تتواجد متواليات فورير ويمكن كتابتها بالشكل المثلثى التالى :

$$\begin{aligned} f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 &+ a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots \\ &+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots \qquad (1) \end{aligned}$$

وتحدد ثوابت فورير a و b بالنسبة لشكل موجى معين عن طريق التكاملات . ونحصل على معاملات جيب التمام (cos) عند إجراء التكامل بضرب كلا الطرفين للمعادلة (1) بالقيمة $\cos n\omega t$ وإجراء التكامل بالنسبة لفترة كاملة . وفترة الموجة الأساسية $2\pi/\omega$ هى فترة المتوالية نظرا لأن كل حد فى المتوالية له تردد عبارة عن التردد الأساسى مضروبا فى رقم صحيح .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = &\int_0^{2\pi/\omega} \tfrac{1}{2}a_0 \cos n\omega t \, dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t \, dt + \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t \, dt + \cdots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \sin \omega t \cos n\omega t \, dt \\ &+ \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega \, dt + \cdots \qquad (2) \end{aligned}$$

التكاملات المحددة فى الطرف الأيمن للمعادلة (2) جميعها صفرا فيما عدا تلك المحتوية على $\cos^2 n\omega t$ والتى حلها القيمة $(\pi/\omega)a_n$ وبالتالى :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt \qquad (3)$$

وبضرب (1) فى $\sin n\omega t$ ثم التكامل كما سبق ينتج معاملات الجيب فى التكامل .

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\sin n\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt \qquad (4)$$

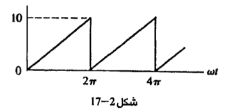
والشكل الآخر لأشكال التكامل مع المتغير $\psi = \omega t$ والفترة المناظرة 2π دائرى يكون :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi)\cos n\psi\, d\psi \qquad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi)\sin n\psi\, d\psi \qquad (6)$$

حيث $F(\psi) = f(\psi/\omega)$. ويكون حدود التكامل من $-T/2$ إلى $T/2$ ، من $-\pi$ إلى $+\pi$ أو لأى حدود أخرى يمكن أن تسهل الحسابات . ويمكن الحصول على الثابت a_0 من (3) ، (5) مع $n = 0$ ومع هذا وحيث أن $(1/2)a_0$ هى متوسط قيمة الدالة فإنه يمكن تحديدها من شكل الموجة بمجرد النظر . وتتقارب المتوالية تقريباً مع عواملها التى حصلنا عليها من إجراء التكاملات للدالة بانتظام عند جميع نقط الاستمرارية وتتقارب للقيمة المتوسطة عند نقطة الإنفصال .

مثـــال 17.1 : أوجد متوالية فورير للشكل الموجى المبين شكل 17-2 .



شكل 2–17

الشكل الموجى متعاقب بزمن تعاقب $2\pi/\omega$ فى t أو 2π فى ωt . هى مستمرة للقيم $0 < \omega t < 2\pi$ وتمثل بالعلاقة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$ مع مناطق عدم استمرار عند $\omega t = n\,2\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$

وبذلك تتحقق شروط ديريشلت والقيمة المتوسطة للدالة هى 5 وبالتالى $(1/2)a_0 = 5$ ولقيم $n > 0$ فإن المعادلة (5) تعطى :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2}\left[\frac{\omega t}{n}\sin n\omega t + \frac{1}{n^2}\cos n\omega t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{10}{2\pi^2 n^2}(\cos n2\pi - \cos 0) = 0$$

وبذلك لا تحتوى المتتالية على حدود جيب التمام وباستخدام (6) نحصل على :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2}\left[-\frac{\omega t}{n}\cos n\omega t + \frac{1}{n^2}\sin n\omega t\right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

وباستخدام معاملات حدود الجيب هذه والحد المتوسط تكون المتتالية :

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\sin \omega t - \frac{10}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots = 5 - \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}$$

ويمكن جمع حدود الجيب وجيب التحكم للترددات المتشابهة لحد جيب أو جيب تمام واحد مع زاوية وجه وبالتالى نحصل على أى من الشكلين التاليين للمتتالية المثلثية .

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum c_n \cos(n\omega t - \theta_n) \qquad (7)$$

and

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum c_n \sin(n\omega t + \phi_n) \qquad (8)$$

حيث $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$, and $\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$. In (7) and (8),

فإن C_n هى القيمة التوافقية والزاويتان هما θ_n ، ϕ_n .

17.3 متواليات فورير الأسية

يمكن كتابة الشكل الموجى المتعاقب f(t) والتى تحقق شروط ديريشلت كمتوالية فورير الأسية والتى تعتبر التغير فى المتواليات المثلثية . والمتوالية الأسية هى :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{jn\omega t} \qquad (9)$$

وللحصول على ناتج التكامل للمعاملات A_n نضرب المعادلة (9) فى كلا الطرفين فى $e^{-jn\omega t}$ ثم تكامل بالنسبة للفترة كلها .

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) = \cdots + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-2}e^{-j2\omega t}e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-1}e^{-j\omega t}e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)$$
$$+ \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_0 e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_1 e^{j\omega t}e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \cdots$$
$$+ \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n e^{jn\omega t}\,e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \cdots \qquad (10)$$

وتكون التكاملات المحدودة فى الطرف الأيمن للمعادلة (10) كلها أصفارا فيما عدا $\int_0^{2\pi} A_n d(\omega t)$ والتى يكون لها القيمة $2\pi A_n$ وبالتالى :

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) \qquad \text{or} \qquad \mathbf{A}_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-j2\pi nt/T}\,dt \qquad (11)$$

وبالمثل كما مع إجراء تكاملات a_n ، b_n فإن حدود التكامل فى (11) يمكن أن تكون فقط النهاية لأى فترة كاملة مناسبة وليس بالضرورى أن تكون من 0 إلى 2π أو من 0 إلى T . لاحظ أنه عندما f(t) تكون حقيقية فإن $A_{-n} = A^*_n$ وبذلك فإنا نحتاج فقط للقيم الموجبة لقيم n بالنسبة للمعادلة (11) وبالإضافة إلى ذلك فلدينا :

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{A}_n \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}_n \qquad (12)$$

مثـــال 17.2 : أوجد المتوالية الأسية (9) من المتوالية المثلثية (1) .

استبدل حدود الجيب وجيب التمام فى (1) بمكافئاتها الأسية المركبة .

$$\sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \qquad \cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

رتب الحدود الأسية تصاعديا بالنسبة لرتبة n من $-\infty$ إلى $+\infty$. وبذلك نحصل على المجموع اللانهائى فى (9) حيث $A_0 = a_0/2$ وأيضاً :

$$\mathbf{A}_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

مثـــال 17.3 : أوجد متوالية فورير الأسية للشكل الموجى المبين شكل 2-17 وباستخدام معاملات هذه المتوالية الأسية أوجد a_n ، b_n للمتوالية المثلثية وقارن مع مثال 1-17 .

فى الفترة $0 < \omega t < 2\pi$ تعطى الدالة بالعلاقة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. وبالبحث فإن القيمة المتوسطة للدالة $A_0 = 5$ وبالتعويض $f(t)$ فى (11) نحصل على معاملات A_n .

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_0^{2\pi} = j\frac{10}{2\pi n}$$

ويوضع معاملات A_n فى (12) يمكن الشكل الأسى لمتواليات فورير للشكل الموجى المعطى.

$$f(t) = \cdots - j\frac{10}{4\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{10}{2\pi}e^{-j\omega t} + 5 + j\frac{10}{2\pi}e^{j\omega t} + j\frac{10}{4\pi}e^{j2\omega t} + \cdots \qquad (13)$$

معاملات المتوالية المثلثية هى من (12).

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{10}{\pi n}$$

وبذلك

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\sin \omega t - \frac{10}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots$$

وهى تماثل لما فى مثال 1-17 .

17.4 أشكال الموجات المتماثلة

تحتوى المتواليات التى حصلنا عليها فى مثال 1-17 فقط على حدود جيبية بالإضافة إلى حد ثابت. وستشمل موجات أخرى على حدود جيب تمام وفى بعض الأحيان لا توجد سوى التوافقيات الطردية المتوالية وذلك فيما إذا كانت المتوالية تحتوى على الجيب أو جيب التمام أو كلاهما. وهذا هو الناتج بالنسبة لبعض الموجات المتماثلة تحديداً. ومعرفة نتائج التماثل يؤدى إلى تقليل الحسابات لتحديد متواليات فورير. ولهذا السبب فإن التعريفات التالية مهمه :

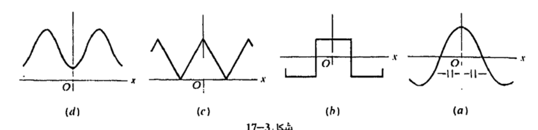
1. الدالة $f(t)$ يقال عها زوجية إذا كان $f(x) = f(x)$.

والدالة $f(t) = 2 + x^2 + x^4$ هى مثال للدوال الزوجية حيث أن قيمتها بالنسبة للقيمة x ، -x متساويان وجيب التمام هى دالة زوجية حيث أننا يمكن التعبير عنها بتعبير أسى.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

مجموع أو حاصل ضرب دالتين زوجتين أو أكثر هو دالة زوجية بإضافة مقدار ثابت فإن الطبيعة الزوجية للدالة لا تزال موجودة.

شكل 3-17 يوضح أشكال موجات لدوال زوجية فى x . وتكون متماثلة بالنسبة للمحور الرأسى كما هو مبين فى شكل 17-3(a) .



شكل 3-17

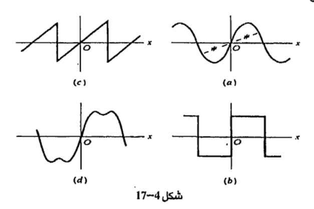
2. يقال للدالة f(x) أنها فردية إذا كان $f(x) = -f(-x)$.

والدالة $f(x) = x + x^3 + x^5$ هى مثال للدوال الفردية حيث أن قيمتها بالنسبة لقيم x ولقيم x- لهما إشارة مخالفة والجيب هى دالة فردية حيث أنه يمكن تمثلها بالمتغير الأسى التالى :

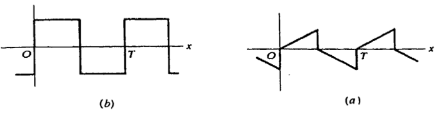
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

مجموع دالتين فرديتين أو أكثر هى دالة فردية ولكن إضافة الثابت يمحو الطبيعة الفردية للدالة وضرب دالتين فرديتي هى دالة زوجية.

وأشكال الموجات المبينة شكل 4-17 تمثل دوال فردية للمتغير x وهى متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل كما هو مبين فى شكل 17-4(a) .



شكل 4-17



شكل 5–17

3. الدالة الدورية $f(x)$ يقال أن لها تماثل نصف موجى إذا كان $f(x) = -f(x + T/2)$ حيث T هى فترة تعاقب . وشكل 5-17 يبين شكلين لموجتي لهما تماثل نصف موجى .

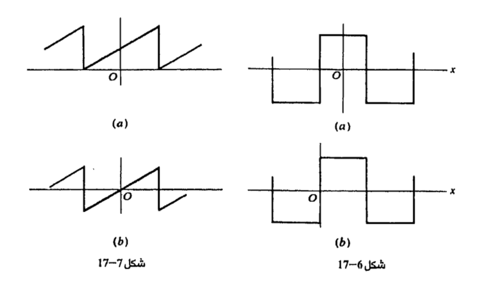
حينما يحدد نوع التماثل بالنسبة لشكل الموجة فإننا نصل إلى الاستنتاجات التالية . فإذا كان شكل الموجة زوجى فإن جميع حدود متوالية فورير تكون حدود جيب تمام مشتملة على المقدار الثابت إذا كانت القيمة المتوسطة للشكل الموجى ليس صفرا . وبالتالى فلا داعى لإجراء التكامل لمعاملات b_n حيث أنه لا توجد حدود للجيب . وإذا كان الشكل الموجى فردياً فإن المتوالية تحتوى فقط على حدود جيبية . ويمكن أن تكون الموجة فردية فقط بعد طرح قيمتها المتوسطة وفى هذه الحالة سيحتوى تمثيل فورير لها على هذا الثابت ومجموعة من حدود الجيب . وإذا احتوى الشكل الجيبى على تماثل نصف موجى فستتواجد فقط التوافقيات الفردية . وستحتوى المتوالية على كل من حدود الجيب وجيب التمام إلا إذا كانت الدالة فردية أو زوجية . وسيكون فى أى حالة a_n ، b_n مساوية للصفر لقيم $n = 2, 4, 6, \ldots$ لأى شكل موجى له تماثل نصف موجى والتماثل نصف الموجى أيضاً من الممكن أن يكون موجوداً فقط بعد طرح القيمة المتوسطة .

وبعض الموجات يمكن أن تكون أشكال فردية أو زوجية وذلك يعتمد على وضع المحور الرأسى . والموجة المربعة لشكل 17-6(a) تبين حالة دالة زوجية أى أن $f(x) = f(-x)$ وبإزاحة المحور الرأسى إلى الوضع المبين فى شكل 17-6(b) يجعل الدالة فردية $f(x) = -f(-x)$.

وبوضع المحور الرأسى عند أى نقطة خلاف تلك المبينة فى شكل 6-17 فإن الموجة المربعة لن تكون زوجية أو فردية وبالتالى فإن متوالياتها تشمل كلا حدود الجيب وجيب التمام وبالتالى فإنه عند تحليل الدوال المتعاقبة فإن المحور الرأسى يجب أن يُختار لينتج إما دالة فردية أو زوجية وذلك لذا كان شكل الموجة يسمح بذلك .

وإزاحة المحور الأفقى يمكن أن يبسِّط تمثيل متوالية الدالة . كمثال فإن شكل الموجة فى شكل 17-7(a) لا يحقق متطلبات الدالة الفردية حتى نلاشى القيمة المتوسطة كما هو مبين شكل 17-7(b) وبالتالى فإن متوالياتها ستحتوى على حد ثابت والحدود الجيبية فقط .

واعتبارات التشابه السابقة يمكن أن تستخدم للتحقق من معاملات متواليات فورير الأسية . ويحتوى شكل الموجهة الزوجى فقط على حدود جيب التمام فى شكل المتوالية المثلثية وبالتالى فإن معاملات فورير الأسية يجب أن تكون أرقام حقيقية خالصة وبالمثل فإن الدالة الفردية التى تحتوى متوالياتها المثلثية على حدود الجيب فيكون لها معاملات تخيلية خالصة فى متوالياتها الأسية .



شكل 17-7   شكل 17-6

17.5 الطيف الخطى

الرسم الذى يبين كلا من قيم التوافقيات فى الموجة يسمى الطيف الخطى . وتتناقص الخطوط بسرعة للموجات التى تتقارب متوالياتها بسرعة . الموجات المحتوية على عدم الاستمرارية مثل موجة سن المنشار والموجة المربعة لها شكل طيفى بقيم متناقصة بطيئة حيث أن متوالياتها بها توافقيات قوية . فالتوافقية العاشرة ستكون غالباً ذات قيم ظاهرة وذلك بالمقارنة بالنسبة للموجة الأساسية . وفى المقابل فإن أشكال الموجات التى لا تحتوى على عدم استمرارية وتكون فى الغالب ذات مظهر قليل

التغيرات المفاجئة سيتقارب بسرعة وتحتاج لعدد قليل من الحدود فقط لإنشاء الموجة . وهذا التقارب السريع سيبدو من شكل خط الطيف حيث تتناقص قيم الترافقيات بسرعة لدرجة أنه بعد الخامس أو السادس فإنها تكون تقريباً غير ظاهرة .

ومحتوى التوافقيات وخط الطيف هى جزء خامل من طبيعة الموجة نفسها ولا تتغير مطلقا بغض النظر عن طريق التحليل . وإزاحة نقطة الأصل يعطى المتوالية المثلثية شكلاً مختلفاً تماماً وتتغير أيضاً بصورة كبيرة معاملات المتوالية الأسية . ومع هذا فإن نفس التوافقيات تظهر دائماً فى المتوالية وكذلك قيمها .

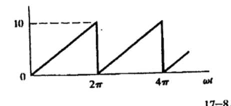
$$c_0 = |\tfrac{1}{2}a_0| \qquad \text{and} \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \geq 1) \tag{14}$$

or

$$c_0 = |A_0| \qquad \text{and} \qquad c_n = |\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_{-n}| = 2|\mathbf{A}_n| \quad (n \geq 1) \tag{15}$$

وهذه المعاملات تبقى كما هى . لاحظ أنه عند استخدام الشكل الأسى فإن قيمة التوافقية النونية (nth) تشمل مساهمات الترددات $+n\omega$ ، $-n\omega$.

مثـــال 17.4 : فى شكل 8-17 مبين شكل موجة سن المنشار لمثال 1-17 والقيم الخطية لها وحيث أنه يوجد فقط الحدود الجيبة فى المتوالية المثلثية فإنه يمكن بيان قيم التوافقيات مباشرة بالقيم $1/2a_0$ ، $|b_n|$ ونحصل على نفس الطيف الخطى من متواليات فورير الأسية (13) .



c_n 5 — 0 1 2 3 4 5 6 n

شكل 8–17

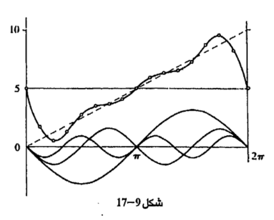
17.6 تركيبات أشكال الموجات

التركيبات هى مجموعة من الأجزاء يتكون منها الشكل الكلى . وتحليل فورير هى إعادة تجميع لحدود المتوالية المثلثية غالباً للأربعة أو الخمسة الأولى للحصول على الموجة الأصلية . وغالباً ما يكون بعد تركيب الموجة يقتنع الطالب أن متوالية فورير تمثل فى الحقيقة الموجة المتعاقبة التى أخذت منها .

وتكون المتوالية المثلثية لموجة سن المنشار لشكل 8-17 هى :

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\sin\omega t - \frac{10}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots$$

وهذه الحدود الأربعة رسمت وجمعت فى شكل 9-17 . ولو أن النتيجة ليست موجة سن المنشار تماماً فإنها يبدو مع استخدام حدود أكثر فى الرسم سيكون أكثرا اقترابا من شكل سن المنشار . وحيث أن هذه الموجة بها عدم استمرارية فإن تقاربها لن يكون سريعاً وبالتالى فإن التركيب باستخدام أربع حدود فقط لا ينتج عنه نتيجة جيدة والحد التالى عند التردد 4ω له القيمة $10/\pi$ والتى تكون ذات قيمة ملحوظة بمقارنتا بالقيمة الأساسية $10/\pi$ وكلما أضيف حد إلى التركيبة فإن عدم انتظام الناتج سيقل. والشكل التقريبى بالنسبة للموجة الأصلية سيتحسن وهذا ما عنيناه سابقاً من أن المتوالية تتقارب لقيمة الدالة فى جميع نقطها ذات الاستمرارية وتؤول إلى القيمة المتوسطة عند نقطة عدم الاستمرارية ومن الواضح فى شكل 9-17 عند 0 ، 2π أن القيمة 5 ستبقى حيث أن جميع حدود الجيب صفرا عند هذه النقطة وهذه هى نقط عدم الاستمرارية وقيمة الدالة حينما تقترب منها من اليسار هى 10 ومن اليمين 0 بقيمة متوسطة 5 .



شكل 9–17

17.7 القيم الفعالة والقدرة

القيم الفعالة (rms) للدالة :

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

هى

$$F_{rms} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a_0)^2 + \tfrac{1}{2}a_1^2 + \tfrac{1}{2}a_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}b_1^2 + \tfrac{1}{2}b_2^2 + \cdots} = \sqrt{c_0^2 + \tfrac{1}{2}c_1^2 + \tfrac{1}{2}c_2^2 + \tfrac{1}{2}c_3^3 + \cdots} \qquad (16)$$

حيث استخدمنا المعادلة (14) .

باعتبار شبكة خطية ذات جهد متعاقب فإننا سنتوقع أن التيار الناتج سيشمل نفس حدود التوافقيات مثل الجهد ولكن بقيم مختلفة حيث أن المعاوقة تختلف مع $n\omega$. ومن الممكن اختفاء بعض التوافقيات فى التيار فمثلا فى دائرة التوازى LC الخالصة فإنه من الجائز أن تتطابق أحد ترددات التوافقيات مع تردد الرنين مما يجعل المعاوقة عند هذا التردد ما لا نهاية وعموماً فإنه يمكن كتابة التالى :

$$v = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n) \qquad \text{and} \qquad i = I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \qquad (17)$$

مع القيم الفعالة المناظرة التالية :

$$V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + \cdots} \qquad \text{and} \qquad I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \tfrac{1}{2}I_1^2 + \tfrac{1}{2}I_2^2 + \cdots} \qquad (18)$$

ونحصل على القدرة المتوسطة P من تكامل القدرة اللحظية والتى نحصل عليها من حاصل ضرب v ، i .

$$p = vi = [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)] \qquad (19)$$

وحيث أن كلا v ، i لهما فترة التعاقب T فإن حاصل ضربهما سيحتوى على عدد دورات T . (لاحظ أنه الموجة واحدة جيبية للجهد فإن حاصل الضرب vi له فترة تعاقب تساوى نصف فترة تعاقب الجهد) ويمكن حساب القيمة المتوسطة بالنسبة لفترة واحدة للجهد التالى :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)]\, dt \qquad (20)$$

وباختبار الحدود الممكنة فى ضرب المتواليتين اللانهائيتين يكون طبقاً للأنواع التالية : ضرب ثابتان ، ضرب مقدار ثابت ودالة جيبية ، ضرب دالتين جيبيتي ذات ترددين مختلفين ، وتربيع دالة

جيبية . وبعد التكامل فإن ضرب الثابتين لا يزال هو V_0I_0 ومربع الدالة الجيبية مع حدودها تبدو كالتالى : $V_0I_0/2 \cos(\phi_n - \psi_n)$ وجميع حواصل الضرب الأخرى بعد التكامل للفترة التعاقبية T تكون صفرا وبالتالى فإن متوسط القدرة هو :

$$P = V_0 I_0 + \tfrac{1}{2} V_1 I_1 \cos\theta_1 + \tfrac{1}{2} V_2 I_2 \cos\theta_2 + \tfrac{1}{2} V_3 I_3 \cos\theta_3 + \cdots \qquad (21)$$

حيث $\theta_n = \phi_n - \psi_n$ هى زاوية المعاوقة للشبكة عند تردد الزاوية $n\omega$ ، V_n ، I_n القيمة العظمى للدوال الجيبية .

وفى الحالة الخاصة للجهد الجيبى ذو التردد الواحد فإن $V_0 = V_2 = V_3 = \ldots = 0$ والمعادلة (21) تؤول إلى الشكل المعروف .

$$P = \tfrac{1}{2} V_1 I_1 \cos\theta_1 = V_{eff} I_{eff} \cos\theta$$

قارن بند 2-10 وأيضاً لجهد التيار المستمر $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = 0$ والمعادلة (21) تصبح :

$$P = V_0 I_0 = VI$$

وبذلك فإن المعادلة (21) هى معادلة عامة تماماً ولاحظ أنه من ناحية الطرف الأيمن لا توجد حدود تحتوى على جهد وتيار بترددين مختلفين وبالرجوع للقدرة فإن كل توافقية تعمل بصفة مطلقة وبالتالى :

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

17.8 تطبيقات فى تحليل الدائرة

لقد تم سابقاً اقتراح أننا يمكن استخدم حدود متوالية الجهد للشبكة الخطية للحصول على حدود التوافقية لمتوالية التيار . وحصلنا عليها بطريقة التراكب . وبالتالى فإننا نعتبر أن كل حد من متوالية فورير والتى تمثل الجهد كمنبع مستقل كما هو مبين شكل 10-17 . والآن نستخدم المعاوقة المكافئة للشبكة عند كل تردد توافقى $n\omega$ لحساب التيار عند ذلك التوافق ومجموع هذه التجاوبات منفردة هو التجاوب الكلى i على شكل متوالية للجهد المستخدم .

مثـــال 17.5 : دائـرة توالى RL بهـا R = 5 Ω ، L = 20 mH (شـكل 17-11) اسـتخدم الجهـد $\upsilon = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t$ (V) مع $\omega = 500$ rad/s . أوجد التيار والقدرة المتوسطة .

أحسب المعاوقة المكافئة للدائرة عند كل تردد يوجد فى دالة الجهد ثم أوجد التيارات المناظرة .

At $\omega = 0$, $Z_0 = R = 5\ \Omega$ and

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{5} = 20\ \text{A}$$

At $\omega = 500$ rad/s, $\mathbf{Z}_1 = 5 + j(500)(20 \times 10^{-3}) = 5 + j10 = 11.15\underline{/63.4^\circ}\ \ \Omega$ and

$$i_1 = \frac{V_{1,\max}}{Z_1} \sin(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11.15} \sin(\omega t - 63.4^\circ) = 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) \quad \text{(A)}$$

At $3\omega = 1500$ rad/s, $\mathbf{Z}_3 = 5 + j30 = 30.4\underline{/80.54^\circ}\ \ \Omega$ and

$$i_3 = \frac{V_{3,\max}}{Z_3} \sin(3\omega t - \theta_3) = \frac{25}{30.4} \sin(3\omega t - 80.54^\circ) = 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \quad \text{(A)}$$

مجموع التيارات التوافقية هو التجاوب الكلى المطلوب وهو متوالية فورير من النوع (8) .

$$i = 20 + 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \quad \text{(A)}$$

القيمة الفعالة للتيار .

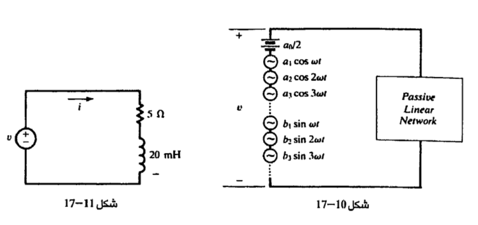
$$I_{\text{eff}} = \sqrt{20^2 + (4.48^2/2) + (0.823^2/2)} = \sqrt{410.6} = 20.25\ \text{A}$$

والتى ينتج عنها القدرة فى المقاومة 5 Ω وهى :

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = (410.6)5 = 2053\ \text{W}$$

وللتأكد من النتائج نحسب القدرة الكلية المتوسطة وذلك بحساب القدرة عند كل مساهمة لأى من التوافقات ثم جمع النتائج .

At $\omega = 0$:	$P_0 = V_0 I_0 = 100(20) = 2000$ W
At $\omega = 500$ rad/s:	$P_1 = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}(50)(4.48)\cos 63.4^\circ = 50.1$ W
At $3\omega = 1500$ rad/s:	$P_3 = \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos\theta_3 = \frac{1}{2}(25)(0.823)\cos 80.54^\circ = 1.69$ W
Then,	$P = 2000 + 50.1 + 1.69 = 2052$ W



شكل 11—17 شكل 10—17

طريقة أخرى :

مفكوك متوالية فورير للجهد على طرفى المقاومة هو :

$$v_R = Ri = 100 + 22.4 \sin(\omega t - 63.4°) + 4.11 \sin(3\omega t - 80.54°) \quad (\mathrm{V})$$

$$V_{Reff} = \sqrt{100^2 + \tfrac{1}{2}(22.4)^2 + \tfrac{1}{2}(4.11)^2} = \sqrt{10\,259} = 101.3 \mathrm{~V}$$

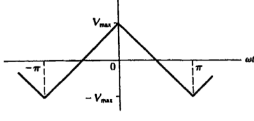
وبالتالى فإن القدرة المعطاه بالمنبع هى $P = V^2_{Reff}/R = (10\,259)/5 = 2052 \mathrm{~W}$.

فى مثال 5-17 أعطى الجهد المؤثر كمتوالية فورير المثالية فى t وكانت الحسابات فى مجال الزمن (استخدمت المعاوقة المركبة فقط للاختصار Z_n ، θ_n يمكن الحصول عليها مباشرة من R ، L ، $n\omega$)
وإذا مثل الجهد بدلا من ذلك بمتوالية فورير الأسية فإن :

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_n e^{jn\omega t}$$

وبذلك يجب أن نتعامل مع المتجهات V_n بطريقة التراكب (الدوران عكس عقارب الساعة إذا كان $n > 0$ ومع عقارب الساعة إذا كان $n < 0$) وهذا يتطلب طرق مجال التردد. وهذا مبين فى مثال 6-17 .

مثال 17.6 : إذا مثل الجهد بموجة مثلثية كما هو مبين فى شكل 12-17 ووصل إلى مكثف خالص C . أحسب التيار الناتج.



شكل 12–17

فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ كانت دالة الجهد $\upsilon = V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t$ ، وعند $0 < \omega t < \pi$ كان الجهد $\upsilon = V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t$. وبالتالى فإن معاملات المتوالية الأسية يمكن إيجادها بإجراء التكامل

$$\mathbf{V}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

والتى منها $V_n = 4V_{max}/\pi^2 n^2$ لقيم n الفردية ، $V_n = 0$ لقيم n الزوجية .

ويكون متجه التيار الناتج من V_n (n فردية) هو :

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_n} = \frac{4V_{max}/\pi^2 n^2}{1/jn\omega C} = j\,\frac{4V_{max}\omega C}{\pi^2 n}$$

وبالمفهوم الضمنى لمعامل الزمن $e^{jn\omega t}$ فإن التيار الناتج التالى :

$$i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{I}_n e^{jn\omega t} = j\,\frac{4V_{max}\omega C}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jn\omega t}}{n}$$

حيث علامة التجميع هى بالنسبة لقيم n الفردية فقط .

ويمكن تحويل المتوالية للشكل المثلثى تم تركيبها لبيان شكل موجة التيار . ومع هذا فإن المتوالية لها نفس الشكل كناتج مسألة 8-17 حيث المعاملات هى $A_n = -j(2V/n\pi)$ لقيم n الفردية فقط والإشارة السالبة هنا لبيان أن موجة التيار هى سالب الموجة المربعة للمسألة 8-17 وقيمته العظمى $2V_{max}\omega C/\pi$.

17.9 تحويلات فورير لأشكال الموجات الغير متعاقبة

الشكل الموجى الغير متعاقب $x(t)$ يقال أنها تحقق شروط ديريشلت إذا كان :

(أ) $x(t)$ قابلة للتكامل تماماً $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$.

(ب) عدد القيم العظمى والقيم الصغرى وعدد نقاط عدم الاستمرارية للموجة $x(t)$ هو قيمة محددة لكل فترة محددة .

نستطيع تعريف تحويل فورير $x(t)$ لمثل هذا النوع من الموجات بالتالى :

$$\mathbf{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad (22a)$$

حيث f هى التردد . والتكامل السابق يسمى تكامل فورير . ودالة الزمن $x(t)$ تسمى معكوس تحويل فورير $X(f)$ ويمكن الحصول عليها بالتالى :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(f) e^{j2\pi f t}\, df \qquad (22b)$$

$x(t)$ ، $X(f)$ تكونان زوج تحويل فورير . وبدلا من f فإنه يمكن استخدام أيضاً السرعة الزاوية $\omega = 2\pi f$ والتى بها تصبح (22a) ، (22b) هما على التوالى :

$$\mathbf{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad (23a)$$

and

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (23b)$$

مثـــال 17.7 أوجد تحويل فورير للدالة $x(t) = e^{-at}u(t)$ حيث $a > 0$ وارسم $X(f)$ لقيم $-\infty < f < +\infty$.

من (22a) تحويل فورير للدالة $x(t)$ هى :

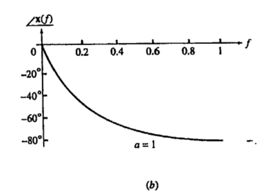
$$\mathbf{X}(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{a + j2\pi f} \qquad (24)$$

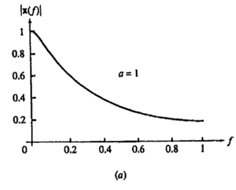
X(f) هى دالة مركبة ذات متغير حقيقى قيمتها وزاوية وجهها هما |X(f)| ، $\angle X(f)$ على التوالى مبية فى شكل 17-13(a) ، 17-13(b) كالتالى :

$$|\mathbf{X}(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \qquad (25a)$$

and

$$\angle\mathbf{X}(f) = -\tan^{-1}(2\pi f/a) \qquad (25b)$$



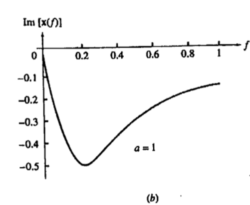


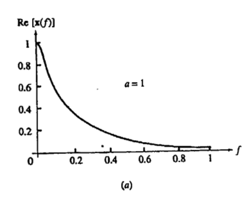
شكل 13–17

ومن جهة أخرى يمكن بيان X(f) بأجزائها الحقيقية والتخيلية $R_e[X(f)]$ ، $I_m[X(f)]$ كما فى شكل 17-14(a) ، 17-14(b) .

$$\mathrm{Re}\,[\mathbf{X}(f)] = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \qquad (26a)$$

$$\mathrm{Im}\,[\mathbf{X}(f)] = \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \qquad (26b)$$





شكل 14–17

مثـــال 17.8 : أوجد تحويل فورير للنبضة المربعة .

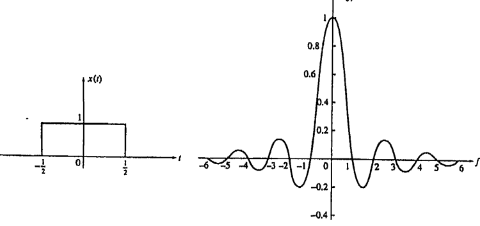
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -T < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

من (22a)

$$\mathbf{X}(f) = \int_{-T}^{T} e^{-j2\pi ft}\, dt = \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{j2\pi f}\right]_{-T}^{T} = \frac{\sin 2\pi fT}{\pi f} \tag{27}$$

ولأن x(t) زوجية فإن X(f) حقيقية . ورسمت أزواج التحويل فى شكلى 17-15(a) و (b) للقيمة

. T = (1/2)s



شكل 15–17

مثـــال 17.9 : أوجد تحويل فورير للدالة $x(t) = e^{at}u(-t)$ حيث a > 0 .

$$\mathbf{X}(f) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi ft}\, dt = \frac{1}{a - j2\pi f} \tag{28}$$

مثـــال 17.10 : أوجد معكوس تحويل فورير للدالة $X(f) = 2a / (a^2 + 4\pi^2 f^2)$ حيث a > 0 .

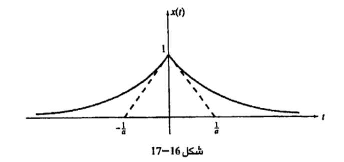
من مفكوك الكسور الجزئية نحصل على :

$$\mathbf{X}(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} \tag{29}$$

نحصل على معكوس كل حد فى (29) باستخدام (24) ، (28) حيث أن :

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-a|t|} \qquad \text{for all } t$$

انظر شكل 17-16 .



شكل 17-16

17.10 خواص تحويل فورير

بعض الخواص لتحويل فورير مبينة فى جدول 17-1 والعديد من أزواج التحويلات الشائعة الاستخدام مبينة فى جدول 17-2 .

جـــدول 17-1

خواص تحويلات فورير

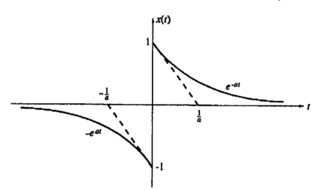
	Time Domain $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,dt$	Frequency Domain $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$
1.	$x(t)$ real	$X(f) = X^*(-f)$
2.	$x(t)$ even, $x(t) = x(-t)$	$X(f) = X(-f)$
3.	$x(t)$ odd, $x(t) = -x(-t)$	$X(f) = -X(-f)$
4.	$X(t)$	$x(-f)$
5.	$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,df$	$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$
6.	$y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{\lvert a\rvert} X(f/a)$
7.	$y(t) = tx(t)$	$Y(f) = -\frac{1}{j2\pi}\frac{dX(f)}{df}$
8.	$y(t) = x(-t)$	$Y(f) = X(-f)$
9.	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0}X(f)$

17.11 الطيف المتصل

$|X(f)|^2$ كما عرفت فى بند 9-17 بكثافة الطاقة أو الطيف بشكل للموجه $x(t)$. وبخلاف الدوال الدورية فإن محتوى الطاقة للموجة $x(t)$ الغير دورية عند كل تردد يكون صفر ومع هذا فإن محتوى الطاقة خلال حزمة تردد به من f_1 إلى f_2 هى :

$$W = 2\int_{f_1}^{f_2} |\mathbf{X}(f)|^2\, df \tag{30}$$

مثـــال 17.11 : أوجد الطيف للدالة $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(t)$ ، $a > 0$. المبينة شكل 17-17 .



شكل 17-17

لدينا $x(t) = x_1(t) = x_2(t)$ وحيث أن $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ ، $x_2(t) = e^{at}u(-t)$ فإن :

$$\mathbf{X}_1(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \qquad \mathbf{X}_2(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

Then

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{X}_1(f) - \mathbf{X}_2(f) = \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

جـــدول 17-2

أزواج تحويل فورير

	$x(t)$	$X(f)$
1.	$e^{-at}u(t), \quad a>0$	$\dfrac{1}{a+j2\pi f}$
2.	$e^{-a\lvert t\rvert}, \quad a>0$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
3.	$te^{-at}u(t), \quad a>0$	$\dfrac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
4.	$\exp(-\pi t^2/\tau^2)$	$\tau \exp(-\pi f^2 \tau^2)$
5.	1, $-T$, T, t	$\dfrac{\sin 2\pi f T}{\pi f}$; $2T$, $-\frac{1}{2T}$, $\frac{1}{2T}$, f
6.	$\dfrac{\sin 2\pi f_0 t}{\pi t}$; $2f_0$, $-\frac{1}{2f_0}$, $\frac{1}{2f_0}$, f	1, $-f_0$, f_0, f
7.	1	$\delta(f)$
8.	$\delta(t)$	1
9.	$\sin 2\pi f_0 t$	$\dfrac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$
10.	$\cos 2\pi f_0 t$	$\dfrac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$

from which
$$|X(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2+4\pi^2 f^2)^2}$$

مثـــال 17.12 : أوجـد وقـارن محتويـات الطــاقة W_1 ، W_2 للدالة $y_1(t) = e^{-|at|}$ ، $y_2(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$ حيث $a > 0$ فى خلال الفترة من 0 إلى 1 Hz ضع $a = 200$.

من المثالين 17-10 ، 17-11 .

$$|Y_1(f)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2+4\pi^2 f^2)^2} \qquad \text{and} \qquad |Y_2(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2+4\pi^2 f^2)^2}$$

خلال $0 < f < 1$ Hz يمكن تقريب الطيف والطاقة بالتالى :

$$|\mathbf{Y}_1(f)|^2 \approx 4/a^2 = 10^{-4}\ \text{J/Hz} \qquad \text{and} \qquad W_1 = 2(10^{-4})\ \text{J} = 200\ \mu\text{J}$$

$$|\mathbf{Y}_2(f)|^2 \approx 10^{-7}f^2 \qquad \text{and} \qquad W_2 \approx 0$$

تتفق النتائج السابقة بالملاحظة أن معظم الطاقات فى الدالة $y_1(t)$ هى قريبة من مجال التردد المنخفض وعلى العكس لقيم $y_2(t)$.

مسائل محلولة

17.1 أوجد متوالية فورير المثلثية للموجة المبينة شكل 18-17 وارسم خطوط الطيف .

فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = V$ وللفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ ، $f(t) = -V$. القيمة المتوسطة للموجة صفرا وبالتالى $a_0/2 = 0$. ونحصل على معاملات جيب التمام بإجراء التكامل وذلك بوضع الدوال كالتالى :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} V\cos n\omega t\, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi}(-V)\cos n\omega t\, d(\omega t)\right] = \frac{V}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\sin n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= 0 \qquad \text{for all } n$$

وبالتالى فإن المتوالية لا تحتوى على حدود جيب التمام وبإجراء التكامل بالنسبة لحدود الجيب فإن :

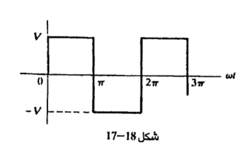
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} V\sin n\omega t\, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi}(-V)\sin n\omega t\, d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{V}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n}\cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi n}(-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n}(1 - \cos n\pi)$$



شكل 19-17



شكل 18-17

وبالتالى $b_n = 4V/\pi n$ لقيم ... ,5 ,3 ,1 = n ، $b_n = 0$ لقيم ... ,6 ,4 ,2 = n وتكون المتوالية للموجه المربعة .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi}\sin\omega t + \frac{4V}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{4V}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots$$

والخطوط الطيفية لهذه المتوالية مبينة شكل 19-17 وتحتوى هذه المتوالية على حدود التوافقيات الفردية فقط كما كان متوقعاً من تشابه شكل الموجة . وحيث أن موجة شكل 18-17 فردية فإن متوالياتها تحتوى فقط على حدود الجيب وحيث أنها تشمل تماثل نصف موجى فإنه يوجد فقط التوافقيات الفردية .

17.2 أوجد متوالية فورير المثلثية للشكل الموجى المثلثى المبين فى شكل 20-17 وارسم خطوط الطيف .

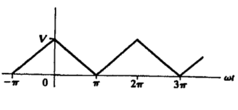
الدالة زوجية $f(t) = f(-t)$ وإذا طرحت قيمتها المتوسطة $V/2$ فإنها أيضاً تكون ذات تماثل نصف موجى أى أن $f(t) = V - (V/\pi)$. ولقيم $-\pi < \omega t < 0$ فإن $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$. ولقيم $0 < \omega t < \pi$ فإن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ وحيث أن أشكال الموجات الزوجية تحتوى على حدود جيب تمام فقط فإن جميع $b_n = 0$ لقيم $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[V + (V/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[V - (V/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t) \\
&= \frac{V}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\omega t\, d(\omega t) + \int_{-\pi}^{0}\frac{\omega t}{\pi}\cos n\omega t\, d(\omega t) - \int_{0}^{\pi}\frac{\omega t}{\pi}\cos n\omega t\, d(\omega t)\right] \\
&= \frac{V}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{\pi}\sin n\omega t\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\sin n\omega t\right]_{0}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{V}{\pi^2 n^2}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2V}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi)
\end{aligned}$$

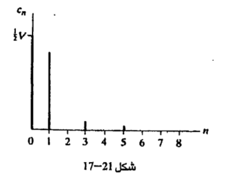
كما توقعنا من التماثل النصف موجى فإن المتوالية تحتوى على الحدود الفردية فقط حيث $a_n = 0$ لقيم ... ,6 ,4 ,2 = n ولقيم ... ,5 ,3 ,1 = n فإن $a_n = 4V/\pi^2 n^2$ وبالتالى فإن متوالية فورير المطلوبة هى :

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2}\cos\omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t + \cdots$$

تتناقص المعاملات مثل $1/n^2$ ولذلك تتقارب المتوالية بسرعة أكبر من التى فى المسألة 1-17 وهذه الحقيقة تبدو من شكل الخط الطيفى لشكل 21-17 .



شكل 17-20



شكل 17-21

17.3 أوجد متوالية فورير المثلثية لموجة سن المنشار المبينة شكل 22-17 وارسم الخط الطيفي لها .

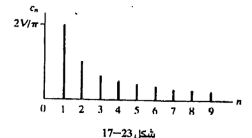
بمجرد النظر نجد أن الشكل الموجى فردى (وبالتالى فإن القيمة المتوسطة صفرا) . وبهذا تحتوى المتوالية على حدود الجيب فقط ولها تعريف واحد $f(t) = (V/\pi)\omega t$ والذى يشرح الموجة فى الفترة من $-\pi$ إلى $+\pi$ وسنستخدم هذه الحدود عند إجراء التكامل لقيم b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\sin n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{n\pi}(\cos n\pi)$$

حيث أن $\cos n\pi$ لقيم n الزوجية هى 1+ ، 1- لقيم n الفردية فإن الإشارات تتغير بالتتابع وتكون المتوالية المطلوبة هى :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{\sin \omega t - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t - \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots\}$$

تتناقص المعاملات مثل $1/n$ وبالتالى فإن المتوالية تتقارب ببطء كما هو مبين بالشكل الطيفى فى شكل 23-17 وفيما عد إزاحة نقطة الأصل والقيمة المتوسطة فإن هذا الشكل الموجى يكون مثل ما فى شكل 8-17 ، قارن الطيفين .



شكل 17-23

شكل 17-22

17.4 أوجد متوالية فورير المثلثية للشكل الموجى المبين فى شكل 24-17 وارسم خطوط الطيف.

فى فترة $\pi > \omega t > 0$، $f(t) = (V/\pi)\omega t$ وللفترة $\pi < \omega t < 2\pi$، $f(t) = 0$ وبمجرد النظر فإن النتيجة المتوسطة للموجة V/4 . ونظرا لأن الموجة ليست زوجية أو فردية فإن المتوالية ستحتوى على كلا حدود الجيب وجيب التمام لقيم $n > 0$ ولذلك :

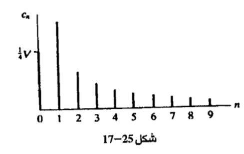
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (V/\pi)\omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\sin n\omega t\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1)$$

When n is even, $\cos n\pi - 1 = 0$ and $a_n = 0$. When n is odd, $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$. The b_n coefficients are

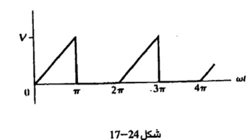
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\sin n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} = -\frac{V}{\pi n}(\cos n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{V}{\pi n}$$

وبالتالى فإن متوالية فورير المطلوبة هى :

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2}\cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t - \cdots$$
$$+ \frac{V}{\pi}\sin \omega t - \frac{V}{2\pi}\sin 2\omega t + \frac{V}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots$$



شكل 25—17



شكل 24—17

نحصل على قيم التوافقيات الزوجية مباشرة من $|b_n|$ حيث يوجد حدود جيب تمام من التوافقيات الزوجية ومع هذا فإن قيم التوافقيات الفردية يجب أن تحسب باستخدام $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ وبالتالى :

$$c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = V(0.377) \qquad c_3 = V(0.109) \qquad c_5 = V(0.064)$$

الشكل الطيفى مبين شكل 25-17 .

17.5 : أوجد متوالية فورير المثلثية لنصف الموجة الجيبية الموحدة المبينة فى شكل 26-17 وارسم خطوط الطيف.

الموجة لا يبدو فيها أى تماثـل ونتوقع لذلك أن المتوالية تحتوى على كلا حدود الجيب وجيب التمام وحيث أن القيمة المتوسطة لا يمكن الحصول عليها بمجرد النظر فإننا نحسب a_0 لاستعمالها فى الحد $a_0/2$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi V \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}[-\cos \omega t]_0^\pi = \frac{2V}{\pi}$$

بعد ذلك نحصل على a_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi V \sin \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{\pi}\left[\frac{-n \sin \omega t \sin n\omega t - \cos n\omega t \cos \omega t}{-n^2+1}\right]_0^\pi = \frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + 1)$$

حينما n تكون زوجية فإن $a_n = 2V / (1 - n^2)$ ومع n الفردية فإن $a_n = 0$. ومع هذا فـإن هذه القيمة لا تكون محددة عند $n = 1$ ولذلك فيجب إجراء تكاملا منفصلا لقيمة a_1 .

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi V \sin \omega t \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\int_0^\pi \tfrac{1}{2} \sin 2\omega t \, d(\omega t) = 0$$

والآن نقدر b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi V \sin \omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[\frac{n \sin \omega t \cos n\omega t - \sin n\omega t \cos \omega t}{-n^2+1}\right]_0^\pi = 0$$

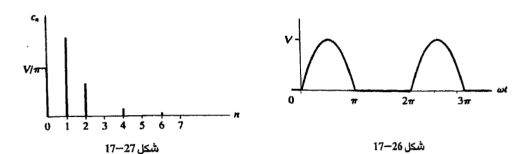
وهنا أيضاً تكون القيمة غير محددة عند $n = 1$ ونقدر b_1 منفردة كالتالى :

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi V \sin^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4}\right]_0^\pi = \frac{V}{2}$$

وبالتالى فإن متوالية فورير المطلوبة هى :

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\sin \omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right)$$

يبين شكل الطيف فى شكل 27-17 قوة الحد الأساسى فى المتوالية والقيم المتناقصة سريعاً للتوافقيات .



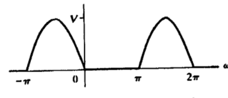
شكل 17-27

شكل 17-26

17.6 أوجد متوالية فورير المثلثية لنصف الموجة الجيبية الموحدة المبينة شكل 28-17 حيث أزيح المحور الرأسى من مكانه الذى كان فى شكل 26-17 .

توصف الدائرة فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ بالقيمة $f(t) = -V \sin \omega t$. والقيمة المتوسطة هى نفسها كما فى المسألة 5-17 أى أن $(1/2)a_0 = V/\pi$ وللمعاملات a_n لدينا :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \sin \omega t) \cos n\omega t \; d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (1 + \cos n\pi)$$



شكل 17-28

لقيم n الزوجية $a_n = 2V/\pi\,(1-n^2)$ ، ولقيم n الفردية $a_n = 0$ فيما عدا $n = 1$ التى يجب أن تستنتج بمفردها .

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \sin \omega t) \cos \omega t \; d(\omega t) = 0$$

وللحصول على المعاملات b_n فإن :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \sin \omega t) \sin n\omega t \; d(\omega t) = 0$$

فيما عدا $n = 1$.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V) \sin^2 \omega t \; d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

وبالتالى فإن المتوالية هى :

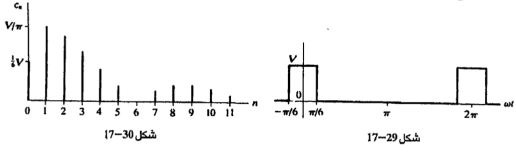
$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{2}\sin\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right)$$

وهذه المتوالية مطابقة لتلك فى المسألة 5-17 فيما عد الحد الأساسى حيث معاملاته تكون سالبة فى هذه المتوالية . ومن الواضح أن شكل الطيف سيكون مطابقاً لشكل 27-17 .

طريقة أخرى :

حيما نطرح الموجة الجيبية $V \sin \omega t$ من الرسم لشكل 26-17 فإنه ينتج شكل 28-17 .

17.7 أوجد متواليات فورير المثلثية للنبضة المربعة المتكررة المبينة فى شكل 25-17 وارسم الخط الطيفى .



شكل 30—17

شكل 29—17

ويوضع المحور الرأسى كما هو مبين فإن الموجة تكون زوجية وستشمل المتوالية على حدود جيب التمام فقط . وفى الفترة من $-\pi$ إلى $+\pi$ المستخدمة لإجراء التكامل فإن الدالة تكون صفرا فيما عد فى الفترة من $-\pi/6$ إلى $\pi/6$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\, d(\omega t) = \frac{V}{3} \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\cos n\omega t\, d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{6}$$

حيث أن... $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 0, -1/2, \ldots$ لقيم ... $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ على التوالى فإن المتوالية تكون :

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\left[\frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2\omega t + 1\left(\frac{1}{3}\right)\cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\cos 4\omega t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\cos 5\omega t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)\cos 7\omega t - \cdots\right]$$

or

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi/6)\cos n\omega t$$

ويتناقص شكل الطيف المبين فى شكل 30-17 ببطء شديد لهذه الموجة حيث أن المتوالية تتقارب ببطء شديد إلى الدالة . ومن المثير حقاً أن قيم توافقيات الحد الثامن والتاسع والعاشر تزيد عن السابع . بالمقارنة مع أشكال الموجات البسيطة التى درست سابقاً فإن القيم للتوافقيات الأعلى كانت تتناقص تدريجياً .

17.8 أوجد متوالية فورير الأسية للموجة المربعة المبينة فى شكل 8-17 ، 31-17 وارسم خط الطيف وأوجد معاملات المتوالية المثلثية من تلك المتوالية الأسية وقارن مع المسألة 1-17 .

فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ ، $f(t) = -V$ وللفترة $0 < \omega t < \pi$ فإن $f(t) = V$. الموجة فردية لذلك $A_0 = 0$ والمعاملات A_n ستكون تخيلية خالصة .

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-V)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} Ve^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right]$$

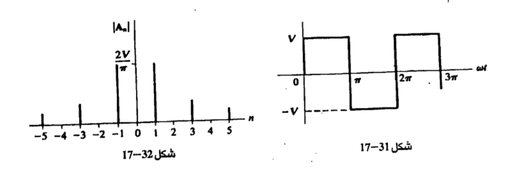
$$= \frac{V}{2\pi}\left\{-\left[\frac{1}{(-jn)}e^{-jn\omega t}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{(-jn)}e^{-jn\omega t}\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{-j2\pi n}(-e^{0} + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^{0}) = j\frac{V}{n\pi}(e^{jn\pi} - 1)$$

لقيم n الزوجية $e^{jn\pi} = +1$ ، $A_n = 0$. ولقيم n الفردية $e^{jn\pi} = -1$ ، $A_n = j(2V/n\pi)$ (تماثل نصف موجى وتكون متوالية فورير المطلوبة هى :

$$f(t) = \cdots + j\frac{2V}{3\pi}e^{-j3\omega t} + j\frac{2V}{\pi}e^{-j\omega t} - j\frac{2V}{\pi}e^{j\omega t} - j\frac{2V}{3\pi}e^{j3\omega t} - \cdots$$

الرسم فى شكل 32-17 يبين القيم لكلا الترددين الموجب والسالب وبمقارنة القيم عند +n ، -n نحصل على نفس الخط الطيفى كما هو مرسوم فى شكل 19-17 .



شكل 32-17

شكل 31-17

معاملات جيب التمام للمتوالية المثلثية هى :

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{A}_n = 0$$

and

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\,\mathbf{A}_n = \frac{4V}{n\pi} \qquad \text{for odd } n \text{ only}$$

وهى تتفق مع المعاملات التى حصلنا عليها فى المسألة 1-17 .

17.9 أوجد متوالية فورير الأسية للموجة المثلثية المبينة شكل 20-17 ، 33-17 وارسم الخط الطيفى .

فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ ، $f(t) = V + (V/\pi)$ ولقيم $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. وتكون الموجة زوجية وبالتالى فـإن المعـاملات a_n ستكون حقيقية خالصة وبمجرد النظر فإن القيمة المتوسطة هى $V/2$

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}[V + (V/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi}[V - (V/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{0}\omega t e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi}(-\omega t)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi}\pi e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2}(1 - e^{jn\pi})$$

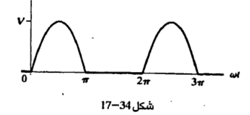
لقيم n الزوجية $e^{jn\pi} = +1$ ، $\mathbf{A}_n = 0$ وكقيم n الفردية $\mathbf{A}_n = 2V/\pi^2 n^2$ وبالتالى فإن المتوالية هى :

$$f(t) = \cdots + \frac{2V}{(-3\pi)^2}e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2}e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2}e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2}e^{j3\omega t} + \cdots$$

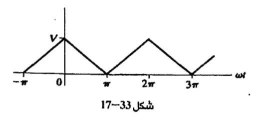
وقيم التوافقيات .

$$c_0 = \frac{V}{2} \qquad c_n = 2|\mathbf{A}_n| = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \ldots) \\ 4V/\pi^2 n^2 & (n = 1, 3, 5, \ldots) \end{cases}$$

وهى تماماً كما رسمت فى شكل 21-17 .



شكل 34—17



شكل 33—17

17.10 أوجد متوالية فورير الأسية لنصف الموجة الطيفى الجيبى الموحد المبين فى شكل 26-17 ، 34-17 وارسم خط الطيف.

فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ ، $f(t) = V \sin \omega t$ من π إلى 2π ، $f(t) = 0$ وبالتالى :

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \, e^{-jn\omega t} \, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)}(-jn \sin \omega t - \cos \omega t)\right]_0^{\pi} = \frac{V(e^{-jn\pi}+1)}{2\pi(1-n^2)}$$

لقيم n الزوجية $A_n = V/\pi\,(1-n^2)$ ولقيم n الفردية $A_n = 0$ ومع هذا فإنه عند $n = 1$ فإن العلاقة A_n تصبح غير معروفة ونطبق هنا قاعدة لوبينال أى أن كل من البسط والمقام يتم تفاضلهما كلا على حده بالنسبة للقيمة n حيث يسمح لها بالاقتراب من القيمة 1 حيث تنشأ القيمة $A_1 = -j(V/4)$.

والقيمة المتوسطة هى :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{2\pi}\Big[-\cos \omega t\Big]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}$$

متوالية فورير الأسية هى :

$$f(t) = \cdots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j\frac{V}{4}e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} - \cdots$$

وقيم التوافقيات

$$c_0 = A_0 = \frac{V}{\pi} \qquad c_n = 2|A_n| = \begin{cases} 2V/\pi(n^2-1) & (n = 2, 4, 6, \ldots) \\ V/2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 3, 5, 7, \ldots) \end{cases}$$

وهى تماما كما رسمت فى شكل 27-17 .

17.11 أوجـد الـقدرة المتوسـطة فى المقاومـة $R = 10\ \Omega$ إذا كان التيـار فى شكل متوالية فورير هو $i = 10 \sin wt + 5 \sin 3wt + 2 \sin 5wt$ (A) .

والقيمة المؤثرة للتيار هى

The current has an effective value $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64.5} = 8.03$ A. Then the

وبالتالى فإن القدرة المتوسطة $P = I^2_{eff}R = (64.5)^2 \times 10 = 645$ W .

طريقة أخرى :

القدرة الكلية هى مجموع قدرات التوافقيات والتى تعطى بالعلاقة $(1/2)\ V_{max}I_{max}\cos\theta$

ولكن الجهد على طرفى المقاومة والتيار فى نفس الوجه لجميع التوافقيات وبالتالى $\theta = 0$.

$$v_R = Ri = 100\sin\omega t + 50\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t$$

and $P = \frac{1}{2}(100)(10) + \frac{1}{2}(50)(5) + \frac{1}{2}(20)(2) = 645\ W.$

17.12 أوجد القدرة المتوسطة المعطاه للشبكة إذا كان الجهد والتيار هما :

$$v = 50 + 50\sin 5\times 10^3 t + 30\sin 10^4 t + 20\sin 2\times 10^4 t \quad (V)$$

$$i = 11.2\sin(5\times 10^3 t + 63.4°) + 10.6\sin(10^4 t + 45°) + 8.97\sin(2\times 10^4 t + 26.6°) \quad (A)$$

القدرة المتوسطة الكلية هى مجموع قدرات التوافقيات .

$$P = (50)(0) + \tfrac{1}{2}(50)(11.2)\cos 63.4° + \tfrac{1}{2}(30)(10.6)\cos 45° + \tfrac{1}{2}(20)(8.97)\cos 26.6° = 317.7\ W$$

17.13 أوجد ثوابت لدائرة ذات عنصرين على التوالى إذا كان الجهد والتيار كما فى المسألة 12-17 .

متوالية الجهد تحتوى على القيمة الثابتة 50 ولكن لا يوجد قيمة مناظرة لها فى التيار ويعنى هذا أن أحد عنصرى الدائرة مكثف . وحيث أن القدرة تعطى للدائرة فإن العنصر الآخر هو مقاومة .

$$I_{eff} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(11.2)^2 + \tfrac{1}{2}(10.6)^2 + \tfrac{1}{2}(8.97)^2} = 12.6\ A$$

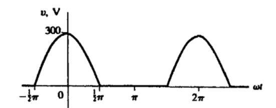
والقدرة المتوسطة $P = I^2_{eff}R$ ومنها $R = P/I^2_{eff} = 317.7/159.2 = 2\ \Omega$.

وعند $\omega = 10^4$ rad/s يتقدم التيار الجهد بالزاوية °40 ومن ثم :

$$1 = \tan 45° = \frac{1}{\omega CR} \qquad \text{or} \qquad C = \frac{1}{(10^4)(2)} = 50\ \mu F$$

ولذلك فإن عنصرى التوالى للدائرة هما مقاومة $2\ \Omega$ ، ومكثف $50\ \mu F$.

17.14 وصل الجهد الموجى المبين شكل 35-17 لدائرة توالى بها $R = 2\ k\Omega$ ، $L = 10\ H$ استخدم متوالية فورير المثلثية للحصول على الجهد على طرفى المقاومة . ارسم خط الطيف للجهد، v_R لبيان تأثير الملف على التوافقيات $\omega = 377$ rad/s .



شكل 17-35

القيمة المتوسطة للجهد V_{max}/π كما فى المسألة 17-5 الموجة زوجية وبالتالى فإن المتوالية تشمل حدود جيب التمام فقط ونحصل على معاملاتها من إجراء التكامل .

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2 \quad \text{V.}$$

هنا قيمة $\cos n\pi/2$ هى 1- لقيم ... ,$n = 2, 6, 10$ وتساوى 1+ لقيم ... ,$n = 4, 8, 12$ ولقيم n الفردية فإن $\cos \pi/2 = 0$ ولكن عند $n = 1$ فإن المعامل تحصل عليها منفرداً من إجراء التكامل .

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{300}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2} \text{ V}$$

Thus,
$$v = \frac{300}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\cos \omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right) \quad \text{(V)}$$

جـــدول 17-3

n	$n\omega$, rad/s	R, kΩ	$n\omega L$, kΩ	Z_n, kΩ	θ_n
0	0	2	0	2	0°
1	377	2	3.77	4.26	62°
2	754	2	7.54	7.78	75.1°
4	1508	2	15.08	15.2	82.45°
6	2262	2	22.62	22.6	84.92°

حسبت المعاوقة الكلية لمتوالية الدائرة لكل توافقية فى علاقة الجهد . ومعاملات فورير فى متوالية التيار هى معاملات متوالية الجهد مقسومة على Z_n وحدود التيار تتأخر عن الجهد بزاوية الوجه θ .

$$I_0 = \frac{300/\pi}{2} \text{ mA}$$

$$i_1 = \frac{300/2}{4.26}\cos(\omega t - 62°) \quad \text{(mA)}$$

$$i_2 = \frac{600/3\pi}{7.78}\cos(2\omega t - 75.1°) \quad \text{(mA)}$$

وبالتالى فإن متوالية التيار هى :

$$i = \frac{300}{2\pi} + \frac{300}{(2)(4.26)}\cos(\omega t - 62°) + \frac{600}{3\pi(7.78)}\cos(2\omega t - 75.1°)$$

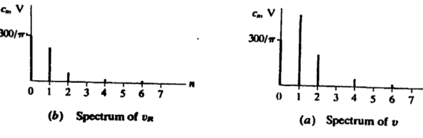
$$- \frac{600}{15\pi(15.2)}\cos(4\omega t - 82.45°) + \frac{600}{35\pi(22.6)}\cos(6\omega t - 84.92°) - \cdots \quad \text{(mA)}$$

والجهد على طرفى المقاومة هو :

$$v_R = Ri = 95.5 + 70.4\cos(\omega t - 62°) + 16.4\cos(2\omega t - 75.1°)$$

$$- 1.67\cos(4\omega t - 82.45°) + 0.483\cos(6\omega t - 84.92°) - \cdots \quad \text{(V)}$$

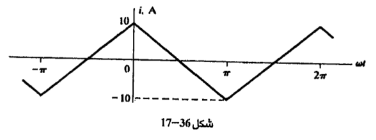
يبين شكل 36-17 بوضوح كيف أن قيم التوافقيات للجهد المستخدم قد نقصت باستخدام ممانعة التوالى الحثية 10 H .



شكل 17–36

17.15 التيار فى العنصر الحثى 10 mH له الشكل الموجى المبين فى شكل 37-17 .

أوجد المتوالية المثلثية للجهد على طرفى العنصر الحثى إذا كان ω = 500 rad/s .

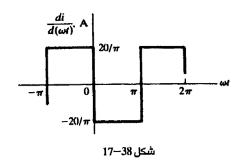


شكل 17–36

مشتقة الشكل الموجى لشكل 37-17 مرسومة فى شكل 38-17 وهى نفسها لشكل 18-17 مع V = -20/π وبالتالى من المسألة 1-17 .

$$\frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{80}{\pi^2}(\sin \omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots) \quad \text{(A)}$$

and so $$v_L = L\omega \frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{400}{\pi^2}(\sin \omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots) \quad \text{(V)}$$



شكل 38—17

مسائل إضافية

17.16 كوّن الشكل الموجى الذى فيه متوالية فورير المثلثية هى :

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2}\{\sin \omega t - \tfrac{1}{9}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{25}\sin 5\omega t - \tfrac{1}{49}\sin 7\omega t + \cdots\}$$

17.17 كوّن الشكل الموجى الذى فيه متوالية فورير هى :

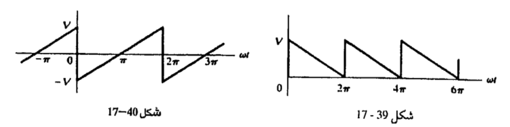
$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2}(\cos \omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots)$$
$$+ \frac{20}{\pi}(\sin \omega t - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t - \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots)$$

17.18 كوّن الشكل الموجى لمتوالية فورير التالية :

$$f(t) = V\Big(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\cos \omega t - \frac{1}{3\pi}\cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi}\cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi}\cos 6\omega t + \cdots$$
$$+ \frac{1}{4}\sin \omega t - \frac{2}{3\pi}\sin 2\omega t + \frac{4}{15\pi}\sin 4\omega t - \cdots\Big)$$

17.19 أوجـــد متـواليـة فورير المثلثية لموجة سن المنشار شكل 39-17 وارسم خط الطيف . قـارن مع مثال 7-17 .

الجواب : $f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi}(\sin \omega t + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots)$



شكل 17—40

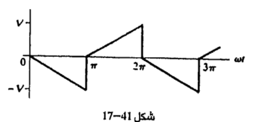
شكل 17 - 39

17.20 أوجد متوالية فورير المثلثية لموجة سن المنشار المبينة شكل 17-40 وارسم خط الطيف . قارن مع نتائج المسألة 17-3 .

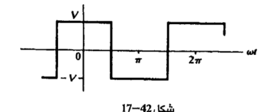
الجواب : $f(t) = \frac{-2V}{\pi}\{\sin \omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots\}$

17.21 أوجد متوالية فورير المثلثية للشكل الموجى المبين شكل 17-41 وارسم خط الطيف .

الجواب : $f(t) = \frac{4V}{\pi^2}\{\cos \omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots\} - \frac{2V}{\pi}\{\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\}$



شكل 17—41



شكل 17—42

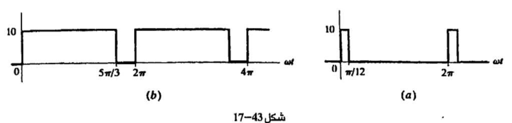
17.22 أوجد متوالية فورير المثلثية للموجة المربعة المبينة شكل 17-42 وارسم خط الطيف . قـار مع نتائج المسألة 17-1 .

الجواب : $f(t) = \frac{4V}{\pi}\{\cos \omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\}$

17.23 أوجد متوالية فورير المثلثية لشكلى الموجات المبينة شكل 17-34 وارسم خط الطيف لكل منهما وقارن بينهما .

الجواب : (a) $f(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{12}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{12}\right)\sin n\omega t\right]$

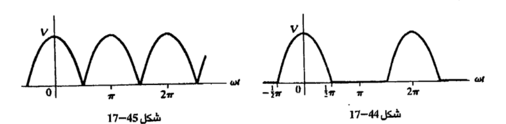
(b) $f(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n5\pi}{3}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n5\pi}{3}\right)\sin n\omega t\right]$



شكل 43—17

17.24 أوجد متوالية فورير المثلثية لنصف الموجة الجيبية الموحدة المبينة شكل 44-17 وارسم خط الطيف وقارن النتائج مع المسألتين 5-17 ، 6-17 .

$$Ans.\quad f(t) = \frac{V}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\cos\omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right)$$



شكل 45—17

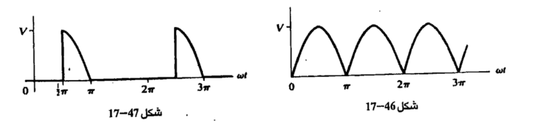
شكل 44—17

17.25 أوجـد متوالية فورير المثلثية للموجـة الجيبية الموحـدة كامـلا المبينة شكل 45-17 وارسـم خط الطـيف .

الجواب : $f(t) = \frac{2V}{\pi}(1 + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots)$

17.26 الموجه فى شكل 46-17 هى نفسها التى فى شكل 45-17 مع إزاحة نقطة الأصل وأوجد متوالية فورير وبين أن الطيفين متطابقان .

الجواب : $f(t) = \frac{2V}{\pi}(1 - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots)$



شكل 47—17

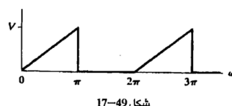
شكل 46—17

17.27 أوجد متوالية فورير المثلثية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-47 .

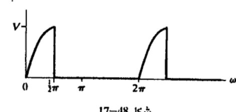
الجواب :
$$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + n\sin n\pi/2)\cos n\omega t$$
$$+\frac{V}{4}\sin\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{-nV\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\right]\sin n\omega t$$

17.28 أوجد متواليات فورير المثلثية المبينة فى شكل 17-48 وأضف حدود هذه المتوالية فى المسألة 17-27 وقارن المجموع مع المتوالية للمسألة 17-5 .

الجواب :
$$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{V(n\sin n\pi/2 - 1)}{\pi(n^2-1)}\cos n\omega t + \frac{V}{4}\sin\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{nV\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\sin n\omega t$$



شكل 17—49



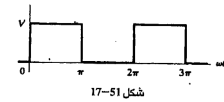
شكل 17—48

17.29 أوجد متوالية فورير الأسية للشكل الموجى فى شكل 17-49 وارسم خط الطيف . حول المعاملات التى حصلت عليها هنا لمعاملات المتوالية المثلثية واكتب المتوالية المثلثية وقارنها مع نتائج المسألة 17-4 .

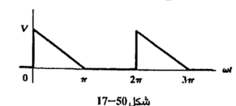
الجواب :
$$f(t) = V\left[\cdots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} - \cdots\right]$$

17-30 أوجد متوالية فورير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 17-50 وارسم خط الطيف .

الجواب :
$$f(t) = V\left[\cdots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} + \cdots\right]$$



شكل 17—51



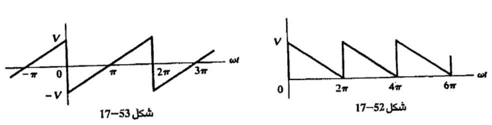
شكل 17—50

17.31 أوجد متوالية فورير الأسية للموجة المربعة المبينة فى شكل 51-17 وارسم خط الطيف أضف المتوالية الأسية للمسألة 29-17 ، 30-17 وقارن المجموع مع المتوالية التى حصلت عليها هنا .

الجواب :
$$f(t)=V\left(\cdots+j\frac{1}{3\pi}e^{-j3\omega t}+j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t}+\frac{1}{2}-j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t}-j\frac{1}{3\pi}e^{j3\omega t}-\cdots\right)$$

17.32 أوجد متوالية فورير الأسية لموجة سن المنشار المبينة فى شكل 52-17 وارسم خط الطيف . حول المعاملات التى حصلت عليها هنا إلى معاملات المتوالية المثلثية وأكتب المتوالية المثلثية وقارن النتائج مع المتوالية التى حصلت عليها فى المسألة 19-17 .

الجواب :
$$f(t)=V\left(\cdots+j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t}+j\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega t}+\frac{1}{2}-j\frac{1}{2\pi}e^{j\omega t}-j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t}-\cdots\right)$$



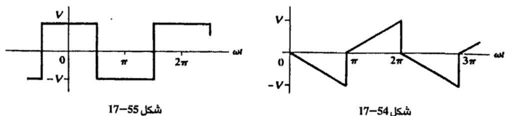
شكل 53—17 شكل 52—17

17.33 أوجد متوالية فورير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 53-17 وارسم الطيف . حول معاملات المتوالية المثلثية الموجودة فى المسألة 20-17 إلى معاملات المتوالية الأسية وقارنها مع معاملات المتوالية التى حصلت عليها هنا .

الجواب :
$$f(t)=V\left(\cdots-j\frac{1}{2\pi}e^{-j2\omega t}-j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t}+j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t}+j\frac{1}{2\pi}e^{j2\omega t}+\cdots\right)$$

17.34 أوجد متوالية فورير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 54-17 حول المعاملات إلى معاملات المتوالية المثلثية وأكتب المتوالية المثلثية وقارنها مع نتائج مسألة 21-17 .

الجواب :
$$f(t)=V\left[\cdots+\left(\frac{2}{9\pi^2}-j\frac{1}{3\pi}\right)e^{-j3\omega t}+\left(\frac{2}{\pi^2}-j\frac{1}{\pi}\right)e^{-j\omega t}+\left(\frac{2}{\pi^2}+j\frac{1}{\pi}\right)e^{j\omega t}+\left(\frac{2}{9\pi^2}+j\frac{1}{3\pi}\right)e^{j3\omega t}+\cdots\right]$$



شكل 17-55

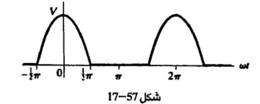
شكل 17-54

17.35 أوجد متوالية فورير الأسية للموجة المربعة المبينة فى شكل 55-17 وارسم خط الطيف حول معاملات المتوالية المثلثية للمسألة 22-17 إلى معاملات المتوالية الأسية وقارن بالمعاملات التى حصلت عليها هنا .

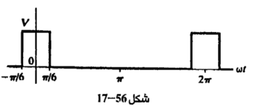
الجواب : $f(t) = \frac{2V}{\pi}(\cdots + \frac{1}{5}e^{-j5\omega t} - \frac{1}{3}e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \frac{1}{3}e^{j3\omega t} + \frac{1}{5}e^{j5\omega t} - \cdots)$

17.36 أوجد متوالية فورير الأسية للشكل الموجى المبين فى شكل 56-17 وارسم خط الطيف .

الجواب : $f(t) = \cdots + \frac{V}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{-j2\omega t} + \frac{V}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{j2\omega t} + \cdots$



شكل 17-57



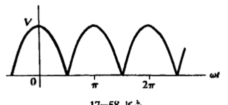
شكل 17-56

17.37 أوجد متوالية فورير الأسية لنصف الموجة الجيبية أو الموحدة المبينة فى شكل 57-17 . حول هذه المعاملات إلى معاملات المتوالية المثلثية وأكتب المتوالية المثلثية وقارنها مع نتائج المسألة 24-17 .

الجواب : $f(t) = \cdots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4}e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \cdots$

17.38 أوجد متوالية فورير الأسية للموجة الجيبية الموحدة كاملا المبينة فى شكل 58-17 وارسم خط الطيف .

الجواب : $f(t) = \cdots - \frac{2V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \cdots$



شكل 58–17

17.39 أوجد الجهد المؤثر والتيار والقدرة المتوسطة لشبكة غير فعالة إذا كان الجهد هو $\upsilon = 200 + 100 \cos (500t + 30°) + 75 \cos (1500t + 60°)$ (V) والتيار الناتج $i = 3.53 \cos (500t + 75°) + 3.55 \cos (1500t + 78.45°)$ (A) ..

الجواب: 218.5 V، 3.54 A, 250.8 W .

17.40 وصل الجهد $\upsilon = 50 + 25 \sin 500t + 10 \sin 2500t$ (V) للشبكة الغير فعالة بحيث كان التيار

$$i = 5 + 2.23 \sin (500t - 26.6°) + 0.556 \sin (1500t - 56.3°) + 0.186 \sin (2500t - 68.2°) \quad \text{(A)}$$

أوجد الجهد المؤثر والتيار المؤثر ومتوسط القدرة. الجواب: 53.6 V, 5.25 A, 276.5 W .

17.41 دائرة توالى لها ثلاث عناصر بها $R = 5\ \Omega$ ، $L = 5$ mH ، $C = 50\ \mu F$ بها الجهد $\upsilon = 150 \sin 1000t + 100 \sin 2000t + 75 \sin 3000t$ (V) أوجد التيار المؤثر ومتوسط القدرة للدائرة. ارسم خط الطيف للجهد والتيار ولاحظ تأثير رنين التوالى.

الجواب: 16.58 A, 1374 W .

17.42 دائرة توالى ذات عنصرين بها $R = 10\ \Omega$ ، $L = 20$ mH بها التيار

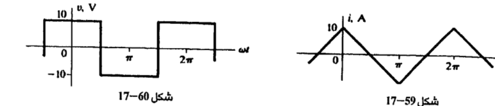
$$i = 5 \sin 100t + 3 \sin 300t + 2 \sin 500t \quad \text{(A)}$$

أوجد تيار الدائرة المؤثر والقدرة المتوسطة. الجواب: 48 V, 190 W .

17.43 عنصر حثى خالص $L = 10$ mH له موجة تيار مثلثية كما فى شكل 59-17 حيث $\omega = 500$ rad/s أوجد متوالية فورير الأسية للجهد على طرفى العنصر الحثى قارن الإجابة مع نتائج المسألة 8-17 .

الجواب:

$$v_L = \frac{200}{\pi^2}\left(\cdots - j\tfrac{1}{3}e^{-j3\omega t} - je^{-j\omega t} + je^{j\omega t} + j\tfrac{1}{3}e^{j\omega t} + \cdots\right) \quad \text{(V)}$$



شكل 17-60

شكل 17-59

17.44 عنصر حثى خالص L = 10 mH عليه جهد ذو شكل موجى كما هو مبين فى شكل 17-60 حيث ω = 200 rad/s أوجد متوالية التيار فى الشكل المثلثى وعرف الشكل الموجى للتيار.

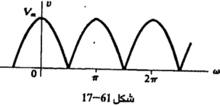
الجواب: $i = \frac{20}{\pi}(\sin \omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \cdots)$ (A); triangular

17.45 يبين شكل 17-61 موجة جيبية موحدة كاملا وهى تمثل الجهد على طرفى دائرة توالى LC استخدم متوالية فورير المثلثية لإيجاد الجهد على طرفى الملف والمكثف.

الجواب:

$$v_L = \frac{4V_m}{\pi}\left[\frac{2\omega L}{3\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)}\cos 2\omega t - \frac{4\omega L}{15\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)}\cos 4\omega t + \cdots\right]$$

$$v_C = \frac{4V_m}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3(2\omega C)\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)}\cos 2\omega t + \frac{1}{15(4\omega C)\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)}\cos 4\omega t - \cdots\right]$$



شكل 17-61

17.46 دائرة تحتوى على ثلاث عناصر مكونة من R = 5 Ω وهى على التوالى مع مجموعة توازى مكونة من L ، C . وعند ω = 500 rad/s ، $X_L = 2\ \Omega$ ، $X_C = 8\ \Omega$ أوجد التيار الكلى إذا كان جهد الدائرة هو υ = 50 + 20 sin 500t + 10 sin 1000t (V) .

الجواب: i = 10 + 3.53 sin (500t - 28.1°) (A) .



ملحق A

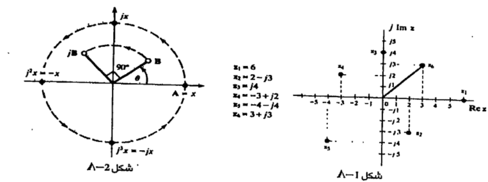
نظام الأعداد المركبة

A1 الأعداد المركبة

العدد المركب z هو عدد فى صورة $x + jy$ حيث x ، y هى أعداد حقيقية ، $j = \sqrt{-1}$. ونكتب $x = \text{Re}\, z$ وهى الجزء الحقيقى للعدد z ، $y = \text{Im}\, z$ وهى الجزء التخيلى للعدد z . و إذا كانت الأجزاء الحقيقية متساوية والأجزاء التخيلية متساوية لعدادان كان العددان متساويان .

A2 المستوى المركب

لزوج من المحاور المتعامدة بحيث يمثل المحور الأفقى Re z والمحور الرأسى j Im z يحددان المستوى المركب الذى فيه كل عدد مركب تمثله نقطة واحدة وبالرجوع لشكل A-1 والذى فيه نبين ستة أعداد مركبة يبدو منه أن كل عدد مركب يمثله متجه خاص به من نقطة الأصل فى المستوى المركب كما هو مبين للعدد المركب z_6 فى شكل A-1 .



شكل A–2 شكل A–1

A3 المعامل المتجه j

بالإضافة لتعريف j المذكور فى بند A1 يمكن النظر إليه كمعامل يعمل على إدارة (لف) أى عدد مركب (متجه) A بالزاوية 90° فى إتجاه عكس عقارب الساعة وفى حالة كون A كمية حقيقية خالصة ، مثل x المبينة فى شكل A-2 فإن دوران A يحولها إلى jx على المحور الموجب التخيلى وبالاستمرار فى ذلك فإن j^2 يتقدم عن A 180° ، j^3 270° وj^4 360° . مبين أيضاً فى شكل A-2 العدد المركب B فى الربع الأول ويصنع الزاوية θ . لاحظ أن jB فى الربع الثانى عند الزاوية $\theta + 90°$.

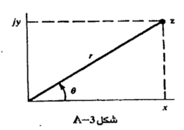
A4 التمثيلات الأخرى للأعداد المركبة

عرفت الأعداد المركبة بند A1 بشكلى الإحداثيات . وفى شكل A-3 $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$

والعدد المركب x يمكن كتابته فى الشكل المثلثى كالتالى :

$$\mathbf{z} = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

حيث r هى الرقمي الحسابىْ أو القيمة المطلقة (والتعبير $r = |z|$ هو المستعمل الشائع) بحيث أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، الزاوية $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ وهى زاوية العدد z .



شكل A-3

تسمح علاقة أويلر بتمثيل آخر للعدد المركب يسمى الشكل الأسى .

$$\mathbf{z} = r\cos\theta + jr\sin\theta = re^{j\theta}$$

وشكل آخر شائع الاستعمال فى تحليل الدوائر هو شكل ستاينمتر القطبى $\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$ حيث θ بالدرجات .

A5 جمع وطرح الأعداد المركبة

لجمع عددين مركبين فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء المركبة معا وفى الطرح كذلك نطرح الأجزاء الحقيقية معا ونطرح الأجزاء التخيلية معا ومن وجهة النظر العملية فإننا نقوم بعملية الجمع والطرح بطريقة أسهل ، حينما يكون كلا العددان فى شكل الإحداثيات .

مثـــال A.1 : إذا كان $z_1 = 5 - j2$ ، $z_2 = -3 - j8$.

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$$

A6 ضرب الأعداد المركبة

نضرب عددين مركبين حينما يكون كلاهما فى الشكل الأسى ويكون الناتج مباشرة من قوانين الأس .

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1e^{j\theta_1})(r_2e^{j\theta_2}) = r_1r_2e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

وحاصل ضرب ستاينمتر القطبى مستنتج من الشكل القطبى .

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1\underline{/\theta_1})(r_2\underline{/\theta_2}) = r_1r_2\underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

وحاصل الضرب بالطريقة المثلثية يمكن التعامل معه كأعداد مركبة ذات حدين .

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$

مثـــال A.2 : If $\mathbf{z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ and $\mathbf{z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, then $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

مثـــال A.3 : If $\mathbf{z}_1 = 2\underline{/30°}$ and $\mathbf{z}_2 = 5\underline{/-45°}$, then $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2\underline{/30°})(5\underline{/-45°}) = 10\underline{/-15°}$.

مثـــال A.4 : If $\mathbf{z}_1 = 2 + j3$ and $\mathbf{z}_2 = -1 - j3$, then $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$.

A7 قسمة الأعداد المركبة

خارج قسمة عددين مركبين فى الشكل الأسى يستنتج مباشرة من قوانين الأس .

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}} = \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

ومرة أخرى فإن الشكل القطبى لستاينمتر فى القسمة يستنتج من الشكل الأسى

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1\underline{/\theta_1}}{r_2\underline{/\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

وقسمة عددا مركبان فى الشكل الإحداثى يكون بضرب كلا البسط والمقام بمرافق المقام (انظر بند A8) .

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثـــال A.5 : إذا كان

Given $\mathbf{z}_1 = 4e^{j\pi/3}$ and $\mathbf{z}_2 = 2e^{j\pi/6}$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$$

مثـــال A.6 : إذا كان

Given $\mathbf{z}_1 = 8\underline{/-30°}$ and $\mathbf{z}_2 = 2\underline{/-60°}$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{8\underline{/-30°}}{2\underline{/-60°}} = 4\underline{/30°}$$

مثـــال A.7 : إذا كان

Given $\mathbf{z}_1 = 4 - j5$ and $\mathbf{z}_2 = 1 + j2$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2}\left(\frac{1 - j2}{1 - j2}\right) = -\frac{6}{5} - j\frac{13}{5}$$

A8 مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $\mathbf{z} = x + jy$ هو $\mathbf{z}^* = x - jy$ وبالتالى فإن :

$$\text{Re}\,\mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} + \mathbf{z}^*}{2} \qquad \text{Im}\,\mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}^*}{2j} \qquad |\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\mathbf{z}^*}$$

في المستوى المركب النقط z ، *z هي كصورة مرآة لإتجاه محور القيم الحقيقية

في الشكل الأسي : $z = re^{j\theta}$ ، $z^* = re^{-j\theta}$.

في الشكل القطبي : $z = r\,L\theta$ ، $z^* = r\,L\text{-}\theta$.

في الشكل المثلثي : $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ ، $z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$.

(i) $(z^*)^* = z$

(ii) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

(iii) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

(iv) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

ملحق B

المصفوفات والمحددات

B1 المعادلات الآنية ومصفوفات الخواص

توصف كثير من النظم الهندسية بمجموعة من المعادلات الآتية الغير مطلقة من الدرجة الأولى ذات الشكل .

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

حيث x_j هى المتغيرات الغير مطلقة y_j هى المتغيرات المطلقة ، a_{ij} هى معاملات المتغيرات الغير مطلقة . والمعاملات a_{ij} يمكن أن تكون مقادير ثابتة أو دوال المتغير آخر .

ويمكن الحصول على شكل أفضل لهذه المعادلات بالتعبير عنها بشكل المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

أو $Y = AX$ مع تعريف خاص لحاصل الضرب AX (انظر بند B3) والمصفوفة $A = [a_{ij}]$ تسمى مصفوفة الخواص للنظام ورتبتها أو مقياسها يعرف بالتالى :

$$d(A) = m \times n$$

حيث m هى عدد الصفوف بينما n هى عدد الأعمدة .

B2 أنــواع المصفوفـات

مصفوفة الصف : تسـمى بهـذا الاسـم المصفوفة التى لها أي عدد م الأعمدة ولكنها صف واحد $d(A) = 1 \times n$ وتسمى أيضا متجه الصف .

مصفوفة العمود : وتسمى بهذا الاسم المصفوفة التى لها أى عدد من الصفوف ولكنها عمو واحد $d(A) = m \times 1$ وتسمى أيضاً متجه العمود .

المصفوفة القطرية : وهى التى تكون جميع حدودها القطرية لها قيمة غير صفرية .

مصفوفة الوحدة : هى مصفوفة قطرية فيها عناصر كل قطر هو الوحدة .

المصفوفة الصفرية : وهى التى بها جميع العناصر صفرا .

المصفوفة المربعة : وهى التى بها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة . $d(A) = n \times n$

المصفوفة المتماثلة : والتى تكون على شكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad d(A) = m \times n$$

ومعكوس المصفوفة A هو :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad d(A^T) = n \times m$$

حيث سنعرف المصفوفة A هى أعمدة المصفوفة A^T والعكس بالعكس . والمصفوفة A تكون متماثلة إذا كان $A = A^T$ وبالتالى فإن المصفوفة المتماثلة يجب أن تكون مربعة .

مصفوفة هيرميشان وتعنى بالشكل :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

والمرافق للمصفوفة A هو :

$$A^* = \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & \cdots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} & \cdots & a^*_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^*_{m1} & a^*_{m2} & a^*_{m3} & \cdots & a^*_{mn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A تكون هيرميشيان إذا كان $A = (A^*)^T$ أى أن مصفوفة هيرميشيان هى مصفوفة مربعة ذات عناصر حقيقية فى القطر الرئيسى وعناصر مركبة مترافقة تشمل الأماكن المتقابلة لصورة مرآة بالنسبة للقطر الرئيسى نلاحظ أن $(A^*)^T = (A^T)^*$.

المصفوفة الغير فردية : المصفوفة المربعة $n \times n$ A ليست فردية (أو قابلة للتحويل) إذا وجدت مصفوفة مربعة أخرى $n \times n$ B حيث أن :

$$AB = BA = I$$

بحيث I هى مصفوفة الوحدة $n \times n$ وتسمى المصفوفة B مقلوب المصفوفة A غير فردية ونكتب $B = A^{-1}$ وإذا كانت A غير فردي فإن معادلة المصفوفة $Y = AX$ فى بند B1 لها لكل قيمة للمصفوفة Y الحل الوحيد .

$$X = A^{-1}Y$$

B3 حسابات المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات :

المصفوفتان اللتان لهما نفس الرتبة تكونان قابلتين للجمع أو الطرح والمصفوفتان التى لهما رتبتين مختلفتين لا يمكن جمعهما .

مجموع (أو طرح) مصفوفتين m x n : $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ هى المصفوفة C m x n التى فيها كل عنصر هو مجموع (أو طرح) العنصرين المتناظرين فى كل من A ، B وبالتالى فإن $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

مثال B1 : إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

معكوس جمع (أو طرح) مصفوفتان هو جمع (أو طرح) المصفوفتان المعكوستان .

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

ضرب المصفوفتان

حاصل ضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة A 1 x m والمصفوفة B m x 1 هى المصفوفة C 1 x 1 : $C = [C_{11}]$ حيث :

$$C = [a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; \dots \; a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} \right]$$

لاحظ أن كل عنصر فى مصفوفة الصف تضرب فى العنصر المناظر فى مصفوفة العمود ثم يجمع حاصلا الضرب وغالبا تعرف C بالقيمة الحسابية C_{11} ونتعامل معها كرقم عادى من بين الأرقام التى يشملها عناصر A ، B .

وضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ m x s والمصفوفة $B = [b_{ij}]$ s x n هى المصفوفة m x n : $C = [c_{ij}]$ بحيث :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

مثـــال B2 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3I_1+5I_2-8I_3 \\ 2I_1+1I_2+6I_3 \\ 4I_1-6I_2+7I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5(8)+(-3)(7) & 5(-2)+(-3)(0) & 5(6)+(-3)(9) \\ 4(8)+2(7) & 4(-2)+2(0) & 4(6)+2(9) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A قابلة للضرب مع المصفوفة B أى أن حاصل الضرب AB متواجد فقط حينما يكون عدد أعمدة A مساوياً لعـدد صـفوف B وبالتالى فإنه إذا كان A مصفوفة 2 x 3 ، B مصفوفة 5 x 2 فإنه يمكن عمل الضرب AB ولكن حاصل الضرب BA غير جائز وإذا كانت كلا من D ، A مصفوفتان 3 x 3 فإن كلا الضربين DE ، ED جائز ومع هذا فإنه ليس ضرورياً أن يكون صحيح بأن ED = DE .

ومعكوس حاصل ضرب مصفوفتان هو حاصل ضرب معكوسيهما بعد عكس الترتيب .

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

إذا كانت AB مصفوفتان غير منفردتان ولهما نفس المقياس فإن AB تكون أيضاً غير منفردة مع

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

ضرب المصفوفة فى عدد حسابى

يعرف ضرب المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بعدد حسابى k يعرف بالتالى :

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k \equiv [ka_{ij}]$$

أى أن كل عنصر فى A تضرب فى k ولاحظ الخواص

$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \qquad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) \qquad (k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

B4 محدود المصفوفة المربعة

ملحق بكل مصفوفة n x n : $A = [a_{ij}]$ دالة حسابية معينة لعناصر a_{ij} تسمى محدد A وهذا الرقم يعرف بالتالى :

$$\det \mathbf{A} \quad \text{or} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{or} \quad \Delta_A \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بحيث يوضح الشكل الأخير عناصر المصفوفة A والتى منها تتحدد قيمته وللمحددات ذات الرتبة m = 1 ، m = 2 وتوضيحا لذلك :

$$|a_{11}| = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

واستخدام هذه التعبيرات لقيم n الكبيرة يحتاج لجهد شاق وفى الغالب ما نتجنبها باستخدام نظرية مفكوم لابلاس (انظر فيما بعد) ومن المهم هنا أن نعرف بأن تعريف المحدد يكون بحيث :

$$\det \mathbf{AB} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

لأى محددين n x n AB فإنه يوجد خاصتين أساسيتين هما :

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \qquad \det k\mathbf{A} = k^n \det \mathbf{A}$$

وأخيراً فإن $\det A \neq 0$ (المحدد A) إذا وفقط إذا كانت A ليست منفردة .

مثـــال B3 : حقق قاعدة ضرب المحددات لما يلى :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

لدينا

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{vmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{vmatrix} = 2(27+2\pi) - (9+4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

But

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

وحقيقة $(-9 - 2\pi)\ (-10) = 90 + 20\pi$.

نظرية مفكوك لابلاس

المحدد الأصغر M_{ij} للعناصر a_{ij} للمحدد ذو الرتبة n هو المحدد ذو الرتبة n - 1 والتى حصلنا عليها من حذف الصف والعمود المحتوى على a_{ij} . والعامل المساعد Δ_{ij} يعرف بالتالى :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

وتقرر نظرية لابلاس أن :

فى المحدد للمصفوفة المربعة A اضرب كل عنصر فى الصف p (والعمود) بالعامل المساعد للعنصر المناظر فى الصف q (والعمود) واجمع حاصلى الضرب فيكون الناتج 0 عند $p \neq q$ ويكون مساوياً للمحدد A عند $p = q$.

وينتج عن ذلك مباشرة من نظرية لابلاس أنه إذا كان A له صفين أو عمودين متطابقان فإن المحدد $A = 0$ (ويجب أن يكون A مصفوفة وحيدة) .

عكس المصفوفات بالمحددات

قاعدة كرامر :

يمكن بيان نظرية مفكوك لابلاس بحاصل ضرب المصفوفات كالتالى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

or $$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}$$

حيث $\mathbf{A} = [\Delta_{ji}]$ وهو معكوس المصفوفة للعوامل المساعدة للمصفوفة a_{ij} في محدد A ، I هي مصفوفة الوحدة n x n .

وإذا كانت A ليست فردية فإنه يمكن إجراء القسمة بالمحدد $A \neq 0$ ونستدل أن :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}$$

وهذا يعني أن الحل الوحيد للنظام الخطي $Y = AX$ هو :

$$\mathbf{X} = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}\right)\mathbf{Y}$$

وهو قانون كرامر في شكل المصفوفة . ونحصل على الشكل العام للمحدد بأخذ الصف r $(r = 1, 2, 3, \ldots n)$ لحل المصفوفة . وحيث أن الصف r للمحدد adj A هو :

$$[\Delta_{1r} \;\; \Delta_{2r} \;\; \Delta_{3r} \;\; \cdots \;\; \Delta_{nr}]$$

فإننا نحصل على :

$$x_r = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right)[\Delta_{1r} \;\; \Delta_{2r} \;\; \Delta_{3r} \;\; \cdots \;\; \Delta_{nr}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right)(y_1\Delta_{1r} + y_2\Delta_{2r} + y_3\Delta_{3r} + \cdots + y_n\Delta_{nr})$$

$$= \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(r-1)} & y_1 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(r-1)} & y_2 & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(r-1)} & y_n & a_{n(r+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

يمكن تحقيق المتساوية الأخيرة باستخدام نظرية لابلاس للعمود r للمحدد المعطى .

B5 القيم الجذرية للمصفوفة المربعة

للنظام الخطى $Y = AX$ بالمصفوفة $n \times n$ A فإنه من المهم البحث عن «الإثارات» X التى ينتج عنها «التجاوب» المتناظر Y وبالتالى ضع $Y = \lambda X$ حيث λ عدد حسابى .

$$\lambda X = AX \qquad \text{or} \qquad (\lambda I - A)X = O$$

بحيث O هى مصفوفة صفرية $n \times 1$ والآن إذا كانت المصفوفة $\lambda I - A$ ليست وحيدة فإن الحل $X = Y = O$ سينتج . وبالتالى فإنه للحصول على الحل الهام فإن قيمة λ يجب أن تكون بحيث تجعل $\lambda I - A$ مصفوفة وحيدة أى أنه يجب أن يكون لدينا :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

والحدود n لمعادلة المتعددة الحدود التى تشتمل على λ هى القيم الجذرية للمصفوفة A والحلول الهامة المناظرة X تعرف بالمتجهات الجذرية للمصفوفة A وبوضع $\lambda = 0$ فى الطرف الأيسر من معادلة الخواص السابقة نجد أن الحد الثابت i فى المعادلة يجب أن يكون :

$$\det(-A) = \det[(-1)A] = (-1)^n(\det A)$$

وحيث أن معامل λ^n فى المعادلة هو الوحدة الوحيدة فإن الحد الثابت سيكون أيضاً $(-1)^n$ مكررة فى ضرب جميع الجذور وبذلك فإن محدد المصفوفة المربعة هو حاصل ضرب جميع القيم الجذرية بالتتابع وهو تعريف مفيد فى المحددات .

ملحق C

أمثلة توضيحية

من معلم شاوم الالكترونى

لهذا الكتاب كتاب آخر رفيق له يسمى معلم شاوم الالكترونى والذى يستخدم طريقة ماثكاد التجارية ومصمم لمساعدتك لتعلم المادة العلمية بطريقة مباشرة . ويستخدم المعلم الالكترونى بيئة الرياضة الحية [LIVE-MATH] فى تكنولوجيا حساب برامج الحاسب ليوضح لك على الشاشة ما يقرب من مائة مسألة محلولة من هذا الكتاب بالإضافة إلى ملخص لطريقة التعامل مع النقاط النظرية رما يناظرها الكترونيا وما يتعلق بها . وفى الصفحات التالية إعادة صياغة عينات توضيحية مرئية من المعلم الالكترونى لتساعدك فى فهم الإمكانات الكبيرة لهذه الأداة الالكترونية التعليمية . وقارن هذه الشاسات المرئية المرافقة بالمسائل المحلولة من هذا الكتاب (أرقام الصفحات المناظرة مذكورة عند بداية كل مسألة) لترى أن كلاهما مكمل للآخر . وكيف أن ذلك مفيد جداً .

وفى معلم شاوم الالكترونى ستجد كل المادة العلمية والأشكال والمعادلات لكل مسألة محلولة بالإضافة لما يبدو فى شاشة الحاسب . وكما سترى فى الصفحات التالية فإن كل الرياضيات ستبدو فى شكل مألوف شاملة الوحدات . واختلاف الصور الرياضية والتى تلاحظها بين نشرة شاوم المطبوعة والمعلم الالكترونى مصممة لحث انتباهك للمادة العلمية أو لبيان الطرق المختلفة لحل المسائل الصعبة .

وبقراءتك للصفحات التالية تذكر أن كل رقم أو علامة أو شكل سيكون لها التأثير الكبير حينما تراها على شاشة الحاسب . ويمكنك تغيير بيانات البداية لمسألة وستلاحظ أشكالاً جديدة للمخرج تحسب أمام عينيك كما يمكنك تغيير أى معادلة وفى الحال سترى التأثير على الحسابات الرقمية على الحل . فكل معادلة أو شكل أو رقم تراه قابل للاختبار وكل مسألة محلولة موجودة تصبح ورقة عمل حية يمكنك تعديلها لحل عشرات المسائل المشابهة . والمعلم الالكترونى المصاحب لهذا الكتاب سيساعدك فى تعلم واسترجاع المادة العلمية التى درست فى هذا الكتاب كما يمكنك استعماله كأداة تشغيل لحل المسائل وعلامة ماسكاد المبينة على اليسار

مطبوعة خلال هذا البيان لتبين المسال الموجودة فى المعلم الالكترونى .

وللحصول على معلومات إضافية عن المعلم الالكترونى المرافق بما فى ذلك متطلبات النظام انظر من فضلك إلى غلاف الكتاب الخلفى .

متوسط القدرة والطاقة :

(الدوائر الكهربية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 3-1 ص 5-4)

البيـان : تحمل الدائرة الخطية التيار $i(t, \omega)$ حيث ω هى تردد الزاوية – يوجد فرق جهد على طرفى العنصر $v(\omega, t)$. أوجد الطاقة W_T المنقولة فى فترة واحدة للدالة الجيبية ومتوسط القدرة P_{avg}.

مكونات النظام :

$mA := 10^{-3} \cdot amp \qquad mW := 10^{-3} \cdot watt \qquad Hz := \frac{1}{sec}$

قيم التيار والجهد .

$I_0 := 2.5 \cdot mA \qquad V_0 := 45 \cdot volt$

نفترض أن التردد $\omega = 1\ Hz$

$i(t) := I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad v(t) := V_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

الحـل : يكون تغير كلا من التيار والجهد طبقا للموجة الجيبية المعروفة من خلال الزمن . حينما تضربان فى بعضهما (القدرة = vi) فإن تغيرهما بالنسبة للزمن يبدو هكذا :

$t := 0 \cdot sec, \frac{.1}{\omega} .. 3 \cdot \frac{\pi}{\omega}$

الطاقة هى المساحة أسفل المنحنى أو التكامل خلال دورة واحدة للقدرة اللحظية $V*i$.

$$W_T := \int_{0 \cdot sec}^{\frac{2 \cdot \pi}{\omega}} v(t) \cdot i(t)\, dt$$

$$W_T = 0.353 \cdot joule$$

القدرة اللحظية هى بالتالى الطاقة مقسومة على زمن دورة واحدة .

$$P_{avg} := \frac{W_T}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} \qquad P_{avg} = 56.25 \cdot mW$$

حاول تغيير قيمة التردد ولاحظ أن الطاقة فى دورة واحدة تتغير (والدورات الأقصر تحتوى على قدرة أقل) ولكن هذه القدرة P_{avg} لا تعتمد على ω وهى بالتالى ثابتة وتتوقف القدرة المتوسطة على قيم الموجات الجيبية كالتالى :

$$P_{avg} := \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \qquad P_{avg} = 56.25 \cdot mW$$

حاول حل التكامل جبريا لتتأكد من الصحة .

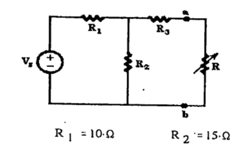
نظرية القدرة العظمي المنقولة :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 16-4 ، ص 52)

البيان : أوجد المقاومة المتغيرة R والتى تنتج من أكبر قدرة منقولة على الطرفين a ، b للدائرة المبينة فيما بعد .

(حينما تكون المقاومة قابلة للتغيير فإنها تسمى مجزئ جهد) .

مكونات النظام



$\Omega \equiv ohm$

$V_s := 100 \cdot volt$

$R_1 := 10 \cdot \Omega \qquad R_2 := 15 \cdot \Omega \qquad R_3 := 5 \cdot \Omega$

الحل : نحصل أولاً على مكافئ ثفنين للدائرة باستبعاد المقاومة المتغيرة R واتبع نفس نظام الحل المبين فى المسألة 6-4 . ومكافئ ثفنين (للدائرة المفتوحة) للجهد هو :

$$V' := \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_s \qquad V' = 60 \cdot volt$$

مقاومة ثفنين المكافئة

$$R' := R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad R' = 11 \cdot ohm$$

باستخدام نظرية القدرة العظمى المنقولة فى الفصل 4 فإن أكبر قدرة منقولة تحدث عند R = R'

وبالتالى فإن أكبر قدرة منقولة هى :

$$P_{max} := \frac{V'^2}{4 \cdot R'} \qquad P_{max} = 81.818 \cdot watt$$

لتقتنع بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة فى المقاومة R باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين فى المسألة 7-4 وستصل إلى تعبير القدرة التالى :

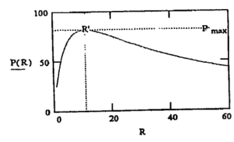
$$P(R) := \frac{\left[\frac{V_s \cdot R_2 \cdot R}{\left[R_1 \cdot (R+R_3+R_2)+R_2 \cdot R+R_2 \cdot R_3\right]}\right]^2}{R}$$

لتقتنع بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة فى المقاومة R باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين في المسألة 7-4 وستصل إلى تعبير القدرة التالي :

$$P(R) := \frac{\left[\frac{V_s \cdot R_2 \cdot R}{\left[R_1 \cdot (R+R_3+R_2)+R_2 \cdot R+R_2 \cdot R_3\right]}\right]^2}{R}$$

ارسم هذا التعبير مع قيم مختلفة للمقاومة R وتبين أن القيمة العظمى هى :

$R := 1 \cdot \Omega .. 60 \cdot \Omega$



والآن تبين لك فائدة نظرية القدرة العظمى المنقولة ويمكن استخدام تبسيط الشبكة للحصول على هذه القيمة العظمى باستخدام التفاضل ولكن هذه الطريقة تستغرق وقتا طويلا بالنسبة للطريقة البسيطة باستخدام مكافىء ثفنين.

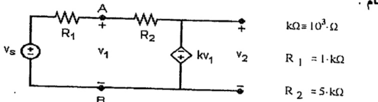
ملاحظة للمؤلف: المكتوب بخط ثقيل والمكتوب تحته خط فى هذه المسألة يبين نوعاً مختاراً م المسائل وإذا كنت تعمل بالحاسب فإن الضغط مرتان على هذه الأجزاء بالفأرة سيعود بك إلى الملف الخاص بهذه المادة.

التغذية الخلفية في دائرة المكبر المثالى :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة ، مثال 5-4 ص 60)

البيان: (أ) أوجد V_2/V_s كدالة فى كسب الدائرة المفتوحة k . (ب) احسب V_2/V_s عند 1000 ، $k = 100$ وناقش النتائج .

مكونات النظام :



$k\Omega \equiv 10^3 \cdot \Omega$

$R_1 = 1 \cdot k\Omega$

$R_2 = 5 \cdot k\Omega$

الحل : المكبر المثالى هو جزء من الدائرة على يمين العقدتان A ، B فى الشكل مع مقاومة التغذية الخلفية R_2 بدلا من الدائرة المفتوحة وأضيفت مقاومة التغذية الخلفية للتحكم فى الكسب الكلى للمكبر وحيث :

$$v_2 = -k \cdot v_1 \qquad \text{or} \qquad v_1 = \frac{-v_2}{k}$$

استخدم KCL عند العقدة A لتعطى :

$$\frac{v_1 - v_S}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{\left(\frac{-v_2}{k} - v_S\right)}{R_1} + \frac{\left(\frac{-v_2}{k} - v_2\right)}{R_2} = 0$$

باستخدام منظم العمليات الرمزى ماثكاد يمكن لنا الحل لإيجاد V_2 (يمكن الاستغناء عن هذا الجزء إذا كنت مستخدما لماكية ماثكاد) للحصول على معلومات أكثر عن طريقة استخدام منظم العمليات الرمزى انظر معلم ماثكاد .

$$v_2 = v_S \cdot \frac{-R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)} \qquad \frac{v_2}{v_S} = \frac{R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)}$$

وبحدود النسب

$$b = \frac{R_1}{R_1 - R_2} \qquad \text{in this case} \qquad b = 0.167$$

يمكن كتابة الكسب V_2/V_s

$$G_{neg} = \frac{v_2}{v_S} \qquad \text{(كلمة neg تمثل كسبا معكوسا)}$$

$$G_{neg}(k) := (1 - b) \cdot \frac{-k}{1 + b \cdot k}$$

(ب) للقيم المعطاه للثابت k فإن المكاسب تكون :

$k_1 := 100$ $\qquad G_{neg}(k_1) = -4.717$

$k_2 := 1000$ $\qquad G_{neg}(k_2) = -4.97$

وبذلك عند زيادة k لعشرة أمثالها ينشأ تغيير طفيف فى الكسب V_2/V_s

$$\frac{G_{neg}(k_2) - G_{neg}(k_1)}{G_{neg}(k_1)} = 5.368 \cdot \%$$

ودعنانبين ذلك بوضوح أكثر بدراسة V_2/V_s بالرسم فى k

$i := 1 .. 70$ $\qquad k_i := 10^{\frac{i}{10}}$ $\qquad g_i := G_{neg}(k_i)$

وشيئ واحد يجب ملاحظته أنه للقيم الكبيرة للثابت k فإن V_2/V_s تقترب من $-R_2/R_1$

$$G_{neg}(\infty) = -5$$

وبذلك فإنه مع التغذية الخلفية طالما أن k ليست صغيرة جداً فإن الكسب الكلى لا يتوقف على تغيرات k .

تكوين الجهد المستمر علي طرفي المكثف :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألة المحلولة 7-7 ص 144).

البيــان: أقفل المفتاح فى الدائرة المبينة فيما يلى عند الزمن $t = 0$ وفى هذه اللحظة كان على المكثف الشحنة Q_0 بالإشارات المبينة . أوجد i ، q عند $t > 0$ وارسم شكلاً للقيمة q .

مكونات الدائرة :

$R = 1 \cdot k\Omega$ $\quad V_s = 50 \cdot volt$

$C = 20 \cdot \mu F$ $\quad Q_0 = 500 \cdot \mu C$

$k\Omega \equiv 10^3 \cdot ohm$ $\quad \mu F \equiv 10^{-6} \cdot farad$ $\quad \mu C \equiv 10^{-6} \cdot coul$

$ms \equiv 10^{-3} \cdot sec$ $\quad mA \equiv 10^{-3} \cdot amp$

الحـل: نعلم أنه عند $t > 0$ فإن العلاقة بين i ، C ، v (وهو الجهد على C) هو :

$$i = C \cdot \frac{d}{dt} v$$

عند $t > 0$ فإن KVL حول الحلقة يعطى :

$$V_s = R \cdot i + v(t) = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v + v$$

$$\frac{d}{dt} v + \frac{v}{R \cdot C} = \frac{V_s}{R \cdot C}$$

مع أخذ الحالة الابتدائية على v_C فإن

$$v(0 \cdot ms) = \frac{-Q_0}{C}$$

(الإشارة السالبة تعنى أن القطبية المبينة فى عكس إتجاه التيار)

الحل الخاص (أو القصرى) يحقق المعادلة التفاضلية ولكن ليس الحالة الابتدائية .

$$v_p(t) = V_s$$

وهذا الحل الخاص صحيحا لأنه عند $t = \infty$ سيكون التيار صفراً وبالتالى لن يكون هناك خفض فى الجهد على طرفى R . والحل المتجانس (أو التجاوب الطبيعى) .

$$v_h(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

يمكن إضافته . ويمكن ضبط قيمة A بحيث يكون الحل الكلى $v_p + v_h$ تحقق كلا المعادلتين :

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_s + A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

ومن الحالة الابتدائية نصل إلى قيمة A .

$$v(0 \cdot ms) = \frac{-Q_0}{C} = V_s + A \qquad \frac{-Q_0}{C} = -25 \cdot volt$$

$$A := \frac{-Q_0}{C} - V_s$$

وبالتالى

$$v(t) := \left(\frac{-Q_0}{C} - V_s\right) \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right) + V_s$$

والتى منها

$$q(t) := C \cdot v(t) \qquad \text{and} \qquad i(t) := \frac{d}{dt} q(t)$$

رسمنا أشكال $q(t)$ ، $i(t)$ ، $v(t)$ فيما يلى لإيجاد فترة تكون $q = 0$ (حيث يقطع المنحنى محور X) . استخدم دالة الجذر المشروحة فى <u>معلم ماثكاد</u> .

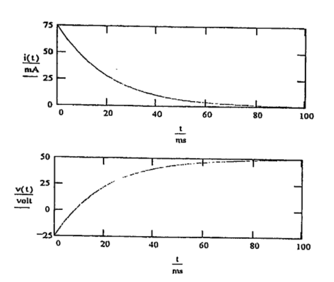
ضمن

$$t_{root} := 5 \cdot ms$$

$$t_{root} := root\left(v\left(t_{root}\right), t_{root}\right) \qquad t_{root} = 8.109 \cdot ms$$

$$t := 0 \cdot sec, .2 \cdot R \cdot C .. 5 \cdot R \cdot C$$

المنحنى السابق يبين أن الشحنة تتغير من القيمة الابتدائية لها إلى الشحنة المحددة بجهد المنبع المتصل عند $t = 0$ وحيث أن هاتين الشحنتين لهما قطبية متضادة فإن المنحنى يمر بالصفر كما هو مبين فى الشكل .

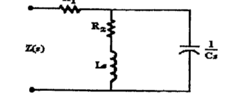


الممانعة المتوقفة علي التردد : ·

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألة المحلولة 11-8 ص 175)

البيـــان : أوجد المعاوقة $Z_{in}(s)$ للدائرة المبينة فيما بعد فى المجال $0 < s < \infty$ ارسم القيمة والزاوية على مقياس لوغارتمى .

مكونات النظام:



$R_1 = 2 \cdot \Omega \qquad L = 2 \cdot \text{henry}$

$R_2 = 2 \cdot \Omega \qquad C = .25 \cdot \text{farad}$

الحـل: باستخدام طريقة التبسيط القياسية للشبكة . أوجد المعاوقة المكافئة لهذه الدائرة .

$$Z_{in}(s) := \left[R_1 + \frac{(R_2 + L \cdot s) \cdot \left(\frac{1}{C \cdot s}\right)}{(R_2 + L \cdot s) + \frac{1}{C \cdot s}} \right]$$

$$Z_{in}(s) := \frac{\left(R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot s + R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + R_1 + R_2 + L \cdot s\right)}{\left(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1\right)}$$

استخدم منظم العمليات الرمزى لتبسيط هذه العلاقة (إذا كنت مستخدما ماكينة ماثكاد فلست فى حاجة لذلك).

$$Z_{in}(s) := \frac{\left[R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + (R_1 \cdot R_2 \cdot C + L) \cdot s + R_1 + R_2\right]}{\left(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1\right)}$$

إقسم كلا من البسط والمقام على LC .

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C}\right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}\right)}$$

(أ) عند $s = 0$.

$$Z_{in}\left(0 \cdot \frac{rad}{sec}\right) = 4 \cdot \Omega$$

وهى الممانعة المتوقفة مع منبع التيار المستمر الثابت : فيكون المكثف كدائرة مفتوحة والملف لدائرة مقصورة كما هو مبين فى الفصل 7 وتبقى فقط المقاومتان على التوالى .

(ب) عند $s = j4$ rad/s

$$Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{rad}{sec}\right) = 2.038 - 1.132j \cdot ohm$$

ولدواعى استعمال المتجهات :

$$\left|Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{rad}{sec}\right)\right| = 2.331 \cdot ohm \qquad arg\left(Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{rad}{sec}\right)\right) = -29.055 \cdot deg$$

وهذه هى الممانعة المتدفقة للمنبع $\sin(4t)$ أو $\cos(4t)$.

(جـ) بالنظر فى الدائرة $Z_{in}(\infty) = 2\ \Omega$ ولكى نرى ذلك اقسم كل حد فى علاقة الممانعة بالقيمة s^2 . الحدود التى بها s ، s^2 فى المقام ستكون صفرا فى النهاية وكل ما يتبقى هو R_1 .

$$Z_{in}(s) := \frac{\left(R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot s} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C \cdot s^2}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{L \cdot s} + \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2}\right)} \qquad R_1 = 2 \cdot \Omega$$

ويستطيع أيضاً منظم العمليات الرمزى الوصول للقيمة Z_{in} حينما s تقترب من ∞ (إذا كنت مستخدما ماكتبه ماثكاد فلست فى حاجة لذلك).

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C}\right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}\right)} \quad \text{yields} \quad R_1$$

عند الترددات العالية جدا يبدو أن المكثف كما لو كان دائرة قصيرة على طرفى فرع RL كما نوقش فى الفصل 12 .

دعنا نقوم بدراسة صغيرة على مدى توقف الممانعة وزاوية الوجه على التردد وللحصول على مدى واسع لتغير s فإن استخدام المقياس اللوغارتمى الذي يجعل المسافات متساوية لمضروب 10 .

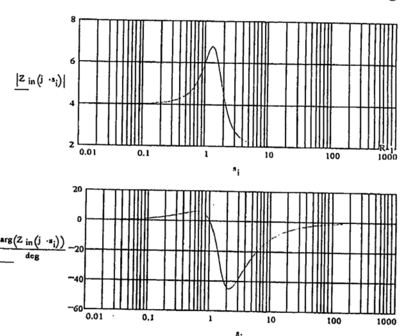
أقل قيمة فى الرسم $s_{low} := .01 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

أكبر قيمة فى الرسم $s_{high} := 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

عدد النقط $N := 100$ $\quad i := 0 .. N - 1$

حجم الخطوة $r := \log\left(\frac{s_{low}}{s_{high}}\right) \cdot \frac{1}{N}$ $\quad r = -0.04$

متغير المدى $s_i := s_{high} \cdot 10^{i \cdot r}$



من الملاحظ أن تصرف الدائرة يتغير من حالة لأخرى وتصل الممانعة إلى قيمتها العظمى عند تردد الرنين وإضافة أكثر فى مادة تجاوب التردد والرنين سيأتى فى الفصل 12 .

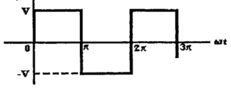
ملاحظة المؤلف: لاحظ أنه يمكن إدخال الأعداد المتجهة أو التخيلية فى ماتكاد إما بالشكل الأسى Aejphase وبالإحداثيات . وحينما يحسب الحاسب إجابة تخيلية فسيؤديها بالشكل الإحداثى ولكن يمكن استخراج القيمة والزاوية بسهولة كما هو مبين سابقا باستخدام المعاملات ‎||‎ ، arg للقيمة الحسابية والزاوية بالترتيب ولاحظ أيضا أنه تم التعامل أتوماتيكيا مع عكس المصفوفة ولذلك فإن المحددات والمحددات الفرعية والمستخدمة فى النسخة المعدلة لشاوم ليست مطلوبة .

متوالية فورير للموجة المربعة :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألتين المحلولتين 1-17 ، 8-17 ص 419 ، ص 424

البيان : (أ) أوجد متوالية فورير المثلثية للموجة المربعة ذات الفترة T والمبينة فيما يلى وارسم خط الطيف . أعد تركيب الموجة فى الزمن باستخدام معاملات فورير . (ب) أوجد معاملات فورير للمتوالية الأسية وقارنها بمعاملات المثلثية .

تركيب النظام :



$T := 2\cdot\pi$ $\qquad\qquad$ $V := 10\cdot volt$

الحل : فى الفترة $f(t) = V : 0 < \omega t < \pi$ وفى الفترة $f(t) = -V : \pi < \omega t < 2\pi$. لاحظ أن هذه الموجة تتفق مع حالات ديرشلت فى الفصل 17 لأنها تحتوى على عدد محدد من عدم الاستمرارية لكل فترة . والقيمة المتوسطة للموجة صفرا ولذلك بالنظر فى الموجة $a_0/2 = 0$ ونحصل على معاملات جيب التمام بعد كتابة ناتج التكامل بالدوال المستخدمة كالتالى :

$a_0 = 0V$ نظراً لأن القيمة المتوسطة صفرا

$a_0 := 0\cdot volt$ since the average value is zero.

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} V\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\, d(\omega\cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\, d(\omega\cdot t)\right]$$

وبالتعويض $u = \omega.t$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} V\cdot\cos(n\cdot u)\,du + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V)\cdot\cos(n\cdot u)\,du\right]$$

اختار منظم العمليات الرمزى للحمل ومن قائمة الرموز اختار العلاقة السابقة كلها ثم اختار إجراء العملية رمزياً (إذا كنت مستخدماً لماكينة ماثكاد فليست فى حاجة لذلك).

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\left(2\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot n\cdot T\right)}{n}\cdot V - \frac{\sin(n\cdot T)}{n}\cdot V\right) = 0\cdot\text{volt}$$

والمفروض أن تتوقع هذه النتيجة لأن الموجة فردية وبذلك تشمل متوالية فورير على حدود الجيب فقط.

ومع موالات الحل بالتكامل لحدود الجيب.

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} V\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,d(\omega\cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V)\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,d(\omega\cdot t)\right]$$

وبالتعويض $u = \omega.L$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} V\cdot\sin(n\cdot u)\,du + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V)\cdot\sin(n\cdot u)\,du\right]$$

ومرة أخرى حل هذه العلاقة رمزيا وبسط الناتج:

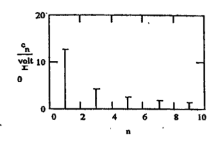
$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\left(-2\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\cdot n\cdot T\right)}{n}\cdot V + \frac{1}{n}\cdot V + \frac{\cos(n\cdot T)}{n}\cdot V\right)$$

تعرف العشرة حدود الأولى لقيم التوافقيات بدلالة معاملات b_n .

$$n_{max} \equiv 10 \qquad n \equiv 1 .. n_{max} \qquad c_n := \sqrt{(b_n)^2}$$

وأسقطت المعاملات a_n من هذه العلاقة لأنها جميعا أصفارا والآن نقوم بتجهيز رسم خط الطيف.

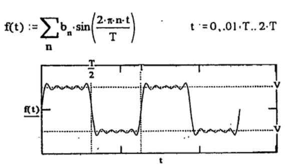
استخدم نوع الراسم "error" لنسخ خطوط الطيف ولعمل ذلك ارسم كلا من المعاملات وخط الصفر واختار نوع الراسم "error" لكليهما. وللحصول على معلومات أخرى في اختيار طريقة الرسم (انظر معلم ماثكاد A).



تحتوى المتوالية على حدود التوافقيات الفردية للجيب (الحدود الزوجية صفر وكما كان متوقعاً بالنظر في الموجة للتماثل). ويحتوى التماثل النصف موجى على التوافقيات الفردية. ويمكن للمتوالية أن تحتوى على حدود جيب التمام إذا تحركت نقطة الأصل للموجة ولكن ستبقى فقط الحدود الفردية للتوافقيات فى الشكل الطيفى. حاول فى ذلك لترى النتيجة.

لتقتنع بنفسك أن هذه المتوالية تمثل حقيقية موجة مربعة أعد تركيب الموجة التالية:

$$f(t) := \sum_{n} b_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T}\right) \qquad t := 0, .01 \cdot T .. 2 \cdot T$$



يمكنك أن ترى كيف أن الشكل يبين تقريباً الموجة المربعة المطلوبة وذلك اعتماداً على الرمز n حاول تغيير قيمة n_{max} لترى كيف يتأثر شكل الموجة تحسينا أو سوءاً.

(ب) فى الفترة $-\pi < \omega t < 2\pi$ ، $f(t) = -V$ فى الفترة $0 < \omega < t < \pi$ ، $f(t) = V$.
والموجة فردية لذلك فإن $A_0 = 0$ ، A_n ستكون تخيلية خالصة.

$$A_0 := 0 \cdot \text{volt}$$

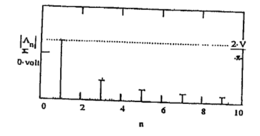
$$A_n = \frac{1}{T} \cdot \left[\int_{\frac{-T}{2}}^{0} -V \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} \, d(\omega \cdot t) + \int_{0}^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} \, d(\omega \cdot t) \right]$$

بالتعويض $u = \omega.t$

$$A_n = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_{\frac{-T}{2}}^{0} -V\cdot e^{-j\cdot n\cdot u}\,du + \int_{0}^{\frac{T}{2}} V\cdot e^{-j\cdot n\cdot u}\,du\right]$$

والآن جهز رسم خط الطيف .

لاحظ أن القيمة أخذت للتعبير عن حجم المعاملات وليس بالصفة المركبة .



Note that the magnitude has been taken to display the size of the coefficients rather than their complex character.

ويبين شكل الطيف قيم الترددات الموجبة فقط وبتجميع القيم عند n+ ، n- يؤدى إلى نفس الشكل الطيفى المرسوم سابقاً فى الجزء (أ) .

ويمكن الحصول على معاملات المتوالية المثلثية باستخدام

$$n := 0..n_{max}$$

معاملات جيب التمام هى :

$a_n = 2\cdot Re(A_n)$ $\quad a^T = (\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,)\cdot volt$

وكما سبق فإن معاملات الجيب هى :

$$b'_n := -2\cdot Im(A_n)$$

$$b'^T = (\,0\ \ 12.732\ \ 0\ \ 4.244\ \ 0\ \ 2.546\ \ 0\ \ 1.819\ \ 0\ \ 1.415\ \ 0\,)\cdot volt$$

قارن مع القيم الأصلية

$$b^T = (\,0\ \ 12.732\ \ 0\ \ 4.244\ \ 0\ \ 2.546\ \ 0\ \ 1.819\ \ 0\ \ 1.415\ \ 0\,)\cdot volt$$



ELECTRIC CIRCUITS



INTERNATIONAL HOUSE FOR CULTURAL INVESTMENTS
P.O.Box 5599 Heliopolis West. Cairo/Egypt
Tel.: 2972344 - 2957655, Fax:(00202) 2957655